FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

El Teorema de Lomonosov

Aitor Mairena Díaz

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

El Teorema de Lomonosov

Aitor Mairena Díaz

Julio 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: O Teorema de Lomonosov
Breve descrición do contido
O obxectivo fundamental deste traballo é que o estudante se familiarice con certas ferramentas e resultados da Teoría de Operadores. Para elo, marcaremos como meta final o Teorema de Lomonosov (probado no ano 1973), que afirma a existencia dun subespazo invariante non trivial para todo operador non escalar que conmuta cun operador compacto non nulo. En espazos de Hilbert, a existencia de subespazos invariantes non triviais para un operador T arbitrario é unha cuestión aínda aberta na actualidade (xuño 2019), feito este que xustifica a importancia do Teorema de Lomonosov. Esencialmente, o traballo consistirá en entender, coñecer e presentar: 1.- os resultados elementais de análise funcional que serán empregados; 2.- algunhas propiedades específicas dos operadores compactos en espazos de Hilbert; 3.- a proba do Teorema de Lomonosov empregando un teorema de punto fixo. Este traballo podería ser de proveito para estudantes con especial interese ou gusto polas materias da área de análise matemática.
Recomendacións
Ter cursadas as materias *Cálculo vectorial e integración de Lebesgue* e *Topoloxía Xeral*. Empregaranse contidos propios da materia *Análise funcional en espazos de Hilbert*.

Índice general

Resumen

Dado un espacio de Banach X, si $T\colon X \longrightarrow X$ es una aplicación lineal y continua, ¿podemos afirmar que T deja invariante algún subespacio vectorial cerrado de X?

La cuestión anterior, comúnmente conocida como "Problema del subespacio invariante", carece de una respuesta plenamente satisfactoria en la actualidad y es considerada por muchos matemáticos como uno de los grandes retos del análisis funcional.

En este Trabajo Fin de Grado, intentaremos conocer y entender algunas de las dificultades propias asociadas a dicha cuestión. Para ello, partiremos de una formulación detallada y rigurosa del problema y estudiaremos algunos casos particulares. Entre ellos, destacaremos el Teorema de Lomonosov, que afirma la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos. Por otra parte, empleando un ejemplo que será discutido con cierto detalle, deduciremos que la solución al Problema del subespacio invariante es, en general, negativa.

Abstract

Given a Banach space X, if $T : X \longrightarrow X$ is a linear and continuous map, can we assert that there is a nontrivial closed subspace of X which is invariant with respect to T?

The previous statement, usually known as "the invariant subspace problem", has not been completely solved yet and many mathematicians consider it as one of the greatest challenges of Functional Analysis.

In this dissertation, we will try to learn and understand some of the difficulties related to this question. In order to do so, we will begin by showing a detailed and rigurous formulation of the problem, and we will study several particular cases. Among them, we will highlight the Lomonosov Theorem which establishes the existence of invariant subspaces for compact operators. On the other hand, using an example that will be studied in detail, we will deduce that the solution to the invariant subspace problem is, in general, negative.

Introducción

El Trabajo Fin de Grado que se presenta a continuación versa sobre el Problema del subespacio invariante en espacios de Banach, cuya formulación es la siguiente:

¿es cierto que todo operador lineal y continuo definido en un espacio de Banach admite un subespacio cerrado, invariante y no trivial?

Tal cuestión fue planteada por primera vez a mediados del pasado siglo XX tras los trabajos de Beurling y von Neumann, en los que se aportaban novedosas soluciones para determinados operadores. Desde entonces, motivados por su dificultad e interés, muchos matemáticos han intentado aproximarse, con mayor o menor éxito, a una solución completa.

En 1970, Paul Halmos propuso a la comunidad matemática (véase [14]) un conjunto de problemas no resueltos sobre teoría de operadores, muchos de ellos relacionados con la existencia y propiedades de subespacios invariantes. Tal y como se apunta en [16], gran parte de las cuestiones planteadas por Halmos dieron lugar a la aparición de poderosos métodos y resultados directamente relacionados con el Problema del subespacio invariante, que se mostraron a su vez muy útiles en problemas de aproximación, estructura o teoría espectral. A modo de ejemplo, uno de los problemas propuestos por Halmos versaba sobre la existencia de subespacios invariantes para un operador T tal que T^2 es compacto. Este fue resuelto afirmativamente con una respuesta mucho más general: si p es un polinomio no nulo y $p(T)$ un operador compacto, entonces T admite subespacios invariantes.

La década de 1970 fue especialmente fructífera en resultados relacionados con el Problema del subespacio invariante. En 1973, Lomonosov prueba su conocido teorema, que afirma que todo operador lineal y acotado definido en un espacio de Banach y que conmuta con un operador compacto no nulo admite algún subespacio invariante no trivial. En 1975, Per Enflo anuncia la existencia de un operador lineal y acotado definido en un espacio de Banach separable sin subespacios invariantes, resolviendo así el problema en espacios de Banach. Finalmente, en 1980, Hadwin, Nordgren, Radjavi and Rosenthal (ver [13]) demuestran que existen operadores lineales y acotados sobre espacios de Hilbert que no cumplen las hipótesis del Teorema de Lomonosov. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos realizados en esta década y las posteriores, el Problema del subespacio invariante todavía continúa abierto a día de hoy en espacios reflexivos y en espacios de Hilbert.

A lo largo de este Trabajo Fin de Grado, nos centraremos en motivar el interés y mostrar la dificultad de dicho problema; también presentaremos su solución más general y ciertos resultados históricamente relevantes, como por ejemplo, alguno de los mencionados en el párrafo anterior. Concretamente, estudiaremos con especial detalle dos de los hitos más importantes en relación con el Problema del subespacio invariante: el Teorema de Lomonosov y la solución al problema en espacios de Banach.

Más precisamente, en el primer capítulo mostraremos algunos conceptos y resultados elementales de análisis funcional que serán fundamentales en el desarrollo del trabajo.

Asimismo, buscaremos remarcar la diferencia entre los espacios de Banach de dimensión finita e infinita, pues es en estos últimos donde el Problema del subespacio invariante es realmente interesante.

A lo largo del segundo capítulo, presentaremos varias formulaciones del problema del subespacio invariante, motivando su interés histórico y su dificultad. Seguidamente, mostraremos resultados generales sobre la existencia de subespacios invariantes relativamente sencillos.

En el Capítulo 3, nos centraremos en el estudio de las propiedades espectrales de los operadores compactos para, a continuación, probar varias versiones del Teorema de Lomonosov. Finalizaremos el capítulo enunciando y demostrando su versión más completa.

En el último capítulo estudiaremos uno de los ejemplos obtenidos por Read, mostrando que existen operadores sin subespacios invariantes. Como conclusión, indicaremos ciertos comentarios y resultados recientes relacionados con el Teorema de Lomonosov y con el Problema del subespacio invariante.

Me gustaría agradecer a mi pareja, familia y amigos su constante apoyo durante mis años de universidad. Quiero mostrar también mi agradecimiento a Jorge Losada, por su paciencia y dedicación como tutor de este Trabajo Fin de Grado. Asimismo, quiero dar las gracias a Pedro Tradacete por despertar en mi el interés por el análisis funcional y por prestarse e implicarse en la cotutorización de este trabajo.

Aitor Mairena Díaz
Santiago de Compostela, 12 de julio de 2020.

Capítulo 1

Preliminares

El análisis funcional surge a principios del siglo XX como parte de una tendencia común en las matemáticas de principios de siglo, buscando la abstracción y la axiomatización. Sus orígenes se pueden atribuir a los estudios de las ecuaciones integrales llevados a cabo por Fredholm y Hilbert (entre otros), quienes buscaban un enfoque más general al problema. Así, comenzó a formalizarse y consolidarse el estudio de espacios vectoriales normados infinito-dimensionales (en principio, espacios de funciones) y las aplicaciones lineales y continuas entre ellos.

Este primer capítulo pretende ser una introducción a algunos de los conceptos y resultados elementales del análisis funcional. Se hará especial énfasis en las particularidades de los operadores definidos entre espacios de Banach de dimensión infinita. Además, se presentarán algunos de los resultados fundamentales del análisis funcional, tales como el Lema de Riesz, el Teorema de la aplicación abierta o el Teorema de Hahn-Banach.

1.1. Teoría de operadores

1.1.1. Conceptos elementales

En lo sucesivo, X, Y representarán dos espacios de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Consideraremos siempre que este cuerpo es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y denotaremos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Escribiremos $\mathcal{L}(X, Y)$ para denotar el conjunto de aplicaciones lineales de X en Y, y B_X representará la bola cerrada en X de centro origen y radio unidad.

Los resultados de este epígrafe han sido probados en la asignatura *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, por lo que no repetiremos tales demostraciones aquí.

Proposición 1.1. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y T una aplicación lineal de X en Y. Son equivalentes:*

- *T es continua en X.*
- *T es continua en $0 \in X$.*
- *Existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ para cada $x \in X$.*
- *$T(B_X)$ es acotado en Y.*

Definición 1.2 (Operador lineal y acotado)**.**
Sean X, Y espacios vectoriales normados, y T una aplicación lineal de X en Y. Diremos que T es un operador lineal y acotado si $T(B_X)$ es un conjunto acotado en Y.

En las condiciones de la definición anterior, denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$ al conjunto de operadores acotados de X en Y. Además escribiremos $\mathcal{B}(X)$ para referirnos a $\mathcal{B}(X,X)$.

Si T es un operador lineal y acotado, se define la norma de operadores de T como:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_X : x \in B_X\}.$$

Nota 1.3. Dados X, Y, Z espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, se tiene que $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. En efecto, de la definición de la norma, para $x \in X$ tenemos

$$\|S \circ T(x)\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|.$$

Nota 1.4. Habitualmente, simplificaremos la notación escribiendo la composición de operadores como $S \circ T = ST$, y la actuación de un operador T sobre un vector x, como $T(x) = Tx$.

En virtud de la Proposición 1.1, se tiene que $\mathcal{B}(X,Y)$ es precisamente el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y. Además, es sencillo probar que el conjunto $\mathcal{B}(X,Y)$ dotado de la norma de operadores es un espacio vectorial normado.

Proposición 1.5. *Sean X, Y espacios vectoriales normados. Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ es también un espacio de Banach.*

Un ejemplo interesante de espacio de operadores acotados es $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$, siendo X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Este conjunto, cuyos elementos se denominan comúnmente funcionales, será analizando detalladamente en la sección siguiente.

1.1.2. Dual de un espacio de Banach

Definición 1.6. Dado X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que $X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ es el dual (topológico) de X.

Proposición 1.7. *Dado X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ completo, se tiene que su dual X^* es también un espacio de Banach.*

La Proposición 1.7 anterior es consecuencia inmediata de la Proposición 1.5. Dado que habitualmente los cuerpos $\mathbb{K}$ que consideramos son $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (completos), en general no nos preocuparemos por la hipótesis de completitud.

El siguiente resultado es uno de los pilares del análisis funcional en espacios de Banach. Su demostración fue vista en la asignatura *Análisis funcional en espacios de Hilbert* y puede encontrarse en [4, p. 40].

Teorema 1.8 (Teorema de Hahn-Banach)**.**
Sea Y un subespacio de un espacio vectorial normado X. Si $f \in Y^*$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F|_Y = f$ y $||F||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$

Corolario 1.9. *Sea X un espacio vectorial normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $x \in X$. Si $f(x) = 0$ para toda $f \in X^*$, entonces $x = 0$.*

Demostración.

Supongamos que $x \neq 0$. Definimos la aplicación lineal $f : Y = \operatorname{span}\{x\} \longrightarrow \mathbb{K}$ como $f(\lambda x) = \lambda$. Como Y es de dimensión finita, f es lineal y acotada (i.e. $f \in Y^*$). Por el Teorema de Hahn-Banach — Teorema 1.8 —, existe $F \in X^*$ tal que $F|_Y = f$ y $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Por lo tanto, hemos encontrado $F \in X^*$ tal que $F(x) = 1 \neq 0$. $\square$

Lema 1.10. *Sea X un espacio de Banach. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, existe $F \in X^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(x) = \|x\|$.*

Demostración.

Definimos la aplicación lineal $f : \text{span}\{x\} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Es inmediato comprobar que $\|f\| = 1$, por lo que, en virtud del Teorema de Hahn-Banach (véase el Teorema 1.8), se deduce la existencia de una extensión $F \in X^*$ de f con $\|F\| = 1$. Así $F(x) = \|x\|$. □

Proposición 1.11. *Dados X, Y espacios de Banach y un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, la aplicación $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ dada por*

$$\begin{aligned} T^*y^* : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto T^*y^*(x) = y^*(Tx) \end{aligned}$$

está bien definida. Es más, T^* es un operador lineal y acotado con $\|T^*\| = \|T\|$.

Demostración.

Es sencillo comprobar que el operador T^* está bien definido, puesto que T^*y^* es lineal y

$$\|T^*y^*(x)\| = \|y^*(Tx)\| \leq \|y^*\|\|T\|\|x\|,$$

es decir, T^*y^* es acotada. Además, es inmediato comprobar que T^* es lineal.

Veamos ahora que para cada $y \in Y$,

$$\sup_{f \in B_{Y^*}} |f(y)| = \|y\|_Y. \tag{1.1}$$

Si $y = 0$, la igualdad está clara. Supongamos entonces que $y \neq 0$.
Por un lado, está claro que $|f(y)| \leq \|f\|\|y\| \leq \|y\|$ para cada $f \in B_{Y^*}$. Por otra parte, en virtud del del Lema 1.10, existe $y^* \in B_{Y^*}$ tal que $y^*(y) = \|y\|$. Esto implica que $\sup_{f \in B_{Y^*}} |f(y)| \geq \|y\|$ y termina la prueba de (1.1).

Teniendo en cuenta la ecuación (1.1) anterior, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|T^*(f)\|_{X^*} = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |T^*(f)(x)| \\ &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |f(T(x))| = \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{Y^*}} |f(T(x))| \\ &= \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y = \|T\|. \end{aligned}$$

□

Definición 1.12. En las condiciones de la proposición anterior, se dice que T^* es el operador adjunto (o dual) de T.

Es bien conocido que, en espacios de dimensión finita, todo espacio vectorial es isomorfo a su dual. Sin embargo, esto no es en general cierto en espacios de dimensión infinita, donde hay que recurrir al bidual del espacio para aproximarnos a la idea de obtener un isomorfismo con el espacio de partida.

Definición 1.13. Dado un espacio de Banach X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, llamaremos bidual (o doble dual) de X al espacio de Banach $X^{**} = (X^*)^*$.

Proposición 1.14. *Si X es un espacio de Banach, la aplicación evaluación $j : X \longrightarrow X^{**}$ definida como $j(x)(y^*) = y^*(x)$ para cada $y^* \in X^*$ y cada $x \in X$ es una isometría lineal (no necesariamente sobreyectiva).*

Demostración.

En primer lugar, veamos que j está bien definida. Sea $x \in X$, probaremos que $j(x) \in X^{**}$. En efecto, $j(x)$ es una aplicación lineal de X^* en $\mathbb{K}$ y para cada $y^* \in X^*$ tenemos que $\|j(x)(y^*)\| = \|y^*(x)\| \leq \|y^*\|\|x\|$, de donde se sigue que $\|j(x)\| \leq \|x\|$. En consecuencia $j(x)$ es un funcional lineal y acotado, y por tanto $j(x) \in X^{**}$ para cada $x \in X$.

Por otra parte, consideremos las siguientes igualdades

$$j(\alpha x + \beta z)(y^*) = y^*(\alpha x + \beta z) = \alpha y^*(x) + \beta y^*(z) = (\alpha j(x) + \beta j(z))(y^*).$$

Como lo anterior es válido para cada $y^* \in X^*$, se deduce que j es lineal.

Por último, comprobemos que j es una isometría. Sea $x \in X$. Hemos visto que $\|j(x)\| \leq \|x\|$. Por otro lado,

$$\|j(x)\| = \sup_{y^* \in B_{X^*}} |j(x)(y^*)| = \sup_{y^* \in B_{X^*}} |y^*(x)|.$$

Teniendo en cuenta que, en virtud del Lema 1.10, existe $y^* \in B_{X^*}$ tal que $y^*(x) = \|x\|$, deducimos que $\|j(x)\| \geq \|x\|$. Así, tenemos finalmente que $\|j(x)\| = \|x\|$. □

Definición 1.15. Un espacio de Banach X se dice reflexivo si la aplicación evaluación $j : X \longrightarrow X^{**}$ es sobreyectiva.

En virtud de la Proposición 1.14, un espacio de Banach reflexivo es isométricamente isomorfo a su bidual a través de la aplicación evaluación. Es importante tener en cuenta que existen ejemplos de espacios de Banach, tales como el espacio de James, que son isométricamente isomorfos a su bidual pero para los que la aplicación evaluación no es un isomorfismo, luego no son reflexivos.

1.1.3. Teoría espectral

Definición 1.16. Dados X, Y espacios de Banach, un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se dice invertible si T es un isomorfismo de X en Y (T lineal, continuo, biyectivo y T^{-1} continuo).

Definición 1.17. Sea X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. El espectro de $T \in \mathcal{B}(X)$, que denotaremos por $\sigma(T)$, se define como:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \colon \lambda I_X - T \text{ no es un operador invertible}\}$$

Asimismo, se define la resolvente de T, $\rho(T)$, como

$$\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T).$$

Definición 1.18 (Autovalores de un operador)**.**
Sea X un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{B}(X)$. Un elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice autovalor de T si $\operatorname{Ker}(T - \lambda I_X) \neq \{0\}$. El conjunto de autovalores de T se denomina espectro puntual de T y se denota por $\sigma_p(T)$.

En las condiciones anteriores, notemos que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T entonces $\lambda \in \sigma(T)$. Sin embargo, en general, el conjunto de autovalores no coincide con el espectro (como sí ocurre en dimensión finita). Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Pueden darse las siguientes posibilidades:

i) $\mathrm{Ker}(\lambda I_X - T) \neq \{0\}$. En este caso, λ es un autovalor de T, es decir $\lambda \in \sigma_p(T)$.

ii) $\mathrm{Ker}(\lambda I_X - T) = \{0\}$ pero el rango de $\lambda I_X - T$ no es denso en X: $\overline{(\lambda I_X - T)(X)} \neq X$. En tal caso, se dice que λ pertenece al espectro residual de T, $\sigma_r(T)$.

iii) $\mathrm{Ker}(\lambda I_X - T) = \{0\}$ y $\overline{(\lambda I_X - T)(X)} = X$. Si esto sucede, diremos que λ pertenece al espectro continuo de T, $\sigma_c(T)$.

En vista de las posibilidades anteriores, se puede descomponer el espectro en la unión disjunta de tres subconjuntos de $\mathbb{K}$ de la forma siguiente:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_r(T) \sqcup \sigma_c(T) \tag{1.2}$$

Los siguientes dos resultados fueron enunciados y demostrados en la asignatura *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, por lo que no los probaremos aquí.

Proposición 1.19. *Si X es un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces el espectro de T, $\sigma(T)$, es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}$, contenido en $B_{\mathbb{K}}[0, ||T||]$.*

Teorema 1.20. *Sea X un espacio de Banach complejo. Para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Resulta interesante mencionar que el Teorema 1.20 es un generalización del Teorema Fundamental del Álgebra (de hecho, su demostración emplea el Teorema de Liouville). En efecto, en dimensión finita $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, luego del teorema se deduce que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. Así, se sigue que todo polinomio característico tiene al menos una raíz compleja.

1.2. Complexificación

Definición 1.21. Sea X un espacio vectorial normado. Se define la complexificación de X como el espacio vectorial normado complejo

$$X_{\mathbb{C}} = X + iX = \{x + iy : x, y \in X\}$$

con las operaciones

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

y la norma dada por:

$$\|x + iy\| = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|$$

Es inmediato comprobar que la norma de la complexificación de un espacio vectorial normado real X satisface las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leq \|x + iy\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Teniendo estas desigualdades en cuenta, se deduce la veracidad de la siguiente proposición.

Proposición 1.22. *Si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, entonces $X_{\mathbb{C}}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$.*

Dados dos espacio vectoriales reales X e Y, cada operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, da lugar a un operador $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ definido como:

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$$

Proposición 1.23 (Propiedades del operador complexificado)**.**
Si X e Y son espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

1. *$T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}}, Y_{\mathbb{C}})$ y $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.*

2. *$T(B_X)$ es relativamente compacto si y sólo si $T_C(B_{X_{\mathbb{C}}})$ es relativamente compacto.*

3. *$(T_{\mathbb{C}})^n = (T^n)_{\mathbb{C}}$.*

Demostración.

1. En primer lugar, dado que $X \subset X_{\mathbb{C}}$, está claro que $\|T_{\mathbb{C}}\| \geq \|T\|$. Por otro lado, para cada $z = x + iy$ y cada ángulo θ tenemos

$$\begin{aligned}\|T(x)\cos\theta + T(y)\sin\theta\| &= \|T(x\cos\theta + y\sin\theta)\| \\ &\leq \|T\|\|x\cos\theta + y\sin\theta\| \\ &\leq \|T\|\|z\|.\end{aligned}$$

   Esto implica que $\|T_{\mathbb{C}}z\| \leq \|T\|\|z\|$, luego $\|T_{\mathbb{C}}\| \leq \|T\|$.

2. Supongamos que $T(B_X)$ es relativamente compacto (esto es, su clausura es compacta). Usando que $\frac{1}{2}(||x|| + ||y||) \leq ||x + iy||$, se sigue:

$$\begin{aligned}T_C(B_{X_C}) &= \{Tx + iTy : ||x + iy|| < 1\} \\ &\subset \{Tx + iTy : \frac{||x|| + ||y||}{2} < 1\} \\ &\subset T(B_X(2)) + iT(B_X(2))\end{aligned}$$

   Como $T(B_X(2))$ es relativamente compacto, se deduce que $T_{\mathbb{C}}(B_{X_{\mathbb{C}}})$ también lo es.

   Supongamos ahora que $T_C(B_{X_{\mathbb{C}}})$ es relativamente compacto. Del contenido $T(B_X) \subset T_{\mathbb{C}}(B_{X_C})$ se deduce que $T(B_X)$ es relativamente compacto.

3. La prueba de esta afirmación es inmediata, teniendo en cuenta que:

$$(T^n)_{\mathbb{C}}(x + iy) = T^n x + iT^n y = T_{\mathbb{C}}(T^{n-1}x + iT^{n-1}y) = ... = (T_{\mathbb{C}})^n(x + iy).$$

□

1.3. Algunos resultados

Para finalizar este primer capítulo, presentamos a continuación algunos resultados clásicos de análisis funcional. Muchos de ellos han sido estudiados en *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, por lo que no incluiremos sus demostraciones. Estas pueden consultarse en [4].

Lema 1.24 (Lema de Riesz).
Sea X un espacio vectorial normado. Si Y es un subespacio cerrado y propio de X, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in S_X$ tal que $d(x, Y) \geq 1 - \epsilon$.

Corolario 1.25. *Sea X es un espacio vectorial normado. X es un espacio vectorial de dimensión finita si y sólo si B_X es un conjunto compacto.*

Teorema 1.26 (Teorema de la aplicación abierta).
Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si T es sobreyectivo, entonces es una aplicación abierta.

Corolario 1.27. *Dados dos espacios de Banach X, Y y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, si T es biyectivo entonces T^{-1} es un operador acotado, y por tanto T es un operador invertible.*

Definición 1.28 (Subespacio Complementado).
Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio cerrado Y de X se dice complementado si existe Z un subespacio cerrado de X tal que $X = Y \oplus Z$.

Teorema 1.29. *Sea X un espacio de Banach. Todo subespacio de X de dimensión finita es complementado.*

Demostración.
Sea Y un subespacio de X de dimensión finita y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base normalizada de Y. Para cada i, definimos el funcional $f_i \in Y^*$ de forma que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Por ser Y finito-dimensional, está claro que f_i son acotadas, por lo que en virtud del Teorema de Hahn-Banah (Teorema 1.8), existen funcionales $F_i \in X^*$ con $\|F_i\| = \|f_i\|$ y $F_i(e_j) = \delta_{ij}$. Definamos $P : X \longrightarrow X$ de modo que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) e_i.$$

Está claro que P es un operador lineal y continuo (como suma de operadores continuos). Definiendo $Z = \text{Ker } P$, se tiene que Z es un subespacio cerrado de X (pues $Z = P^{-1}\{0\}$) y $X = Y \oplus Z$.

En efecto, para $x \in X$ arbitrario,

$$P^2(x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x) e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} F_i(x) F_j(e_i) e_j = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) e_i = P(x),$$

por lo que $P(x - P(x)) = 0$, y en consecuencia $x - P(x) \in \text{Ker} P$. Se deduce entonces que $x = P(x) + (x - P(x))$ con $P(x) \in Y$ y $x - P(x) \in \text{Ker} P$. Es decir $X = Y + Z$.

Por último, si $x \in Y \cap Z$, se sigue que $P(x) = 0$ y que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, y

$$0 = P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_i(e_j) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = x.$$

En consecuencia, $Y \cap Z = \{0\}$, por lo que, finalmente, $X = Y \oplus Z$. □

Para cerrar este primer capítulo, presentamos dos resultados que resultarán fundamentales en la prueba del Teorema de Lomonosov y cuyas demostraciones se pueden encontrar en [3, p. 137] y [2, p. 483], respectivamente.

Teorema 1.30 (Lema de Mazur).
Sea (M, d) un espacio métrico localmente convexo. Si A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces su envoltura convexa cerrada es también totalmente acotada.

En particular, si X es un espacio de Banach, entonces la envoltura convexa cerrada de cualquier subconjunto compacto es también compacta.

Teorema 1.31 (Teorema de punto fijo de Tychonoff).
Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo. Entonces dado un subconjunto no vacío C de X convexo y compacto, toda aplicación $f : C \longrightarrow C$ tiene un punto fijo.

Capítulo 2

Subespacios invariantes

El *Problema del subespacio invariante*, cuyo origen se remonta a mediados del pasado siglo XX, es la motivación de gran parte de los contenidos de este Trabajo Fin de Grado. Dado que a día de hoy todavía carecemos de una respuesta plena para dicho problema, éste puede ser considerado como una de las grandes cuestiones del análisis funcional de las últimas décadas.

En la primera sección de este capítulo, formularemos dicho problema y comentaremos brevemente su dificultad e interés. Ya en la segunda sección, presentaremos las herramientas básicas que serán luego empleadas para obtener resultados elementales sobre existencia de subespacios invariantes.

2.1. El Problema del subespacio invariante

En el marco de los espacios de Banach, la formulación del Problema del subespacio invariante es la siguiente:

Problema 2.1 (Problema del subespacio invariante (en espacios de Banach))**.**
Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach separable sobre* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *y* $T \colon X \longrightarrow X$ *un operador lineal y acotado.*

¿Existe $V \subset X$ *subespacio cerrado en* $(X, \|\cdot\|)$ *tal que* $\{0\} \neq V \neq X$ *y* $T(V) \subset V$*?*

Es decir,

¿existe $V \subset X$ *subespacio cerrado, no trivial e invariante para* T*?*

Recordemos que si X es un espacio vectorial complejo de dimensión finita (es decir, si $X = \mathbb{C}^n$), todo operador lineal (es decir, toda aplicación lineal) $T \colon X \longrightarrow X$ es una aplicación continua que puede "ser descompuesta en partes sencillas" mediante la búsqueda de sus autovalores y autovectores, obteniendo así la correspondiente forma canónica de Jordan. Tal hecho justifica en parte el interés de la cuestión formulada en el Problema 2.1 anterior.

Como es bien sabido, en el caso finito dimensional, el *Teorema fundamental del álgebra* nos permite asegurar que $\sigma(T) \equiv \sigma_P(T) \neq \emptyset$; esto es, dicho resultado afirma la existencia de un autovalor (y entonces también de un autovector) para el operador T. Por tanto, la respuesta al Problema 2.1 anterior es claramente afirmativa si $\dim X = n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$: basta considerar el autoespacio asociado a un autovector.

Sin embargo, si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, la cuestión propuesta en el Problema 2.1 no es, en absoluto, tan sencilla. A pesar de que el *Teorema de Liouville* (resultado que podemos pensar como una generalización del Teorema fundamental del álgebra) nos permite afirmar que $\sigma(T) \neq \emptyset$, ahora ya no podemos concluir que T admita un autovector, pues puede ocurrir que

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \sqcup \sigma_C(T) \sqcup \sigma_R(T) \neq \emptyset, \quad \text{con } \sigma_P(T) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Un ejemplo claro y sencillo de un operador T lineal y acotado satisfaciendo la condición (2.1) anterior es el siguiente.

Ejemplo 2.2 (Un operador T sin autovectores)**.**
Para $1 \leq p < \infty$, consideremos el espacio de Banach de sucesiones dado por

$$\ell_p = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \Big\},$$

y el operador $T : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido como

$$Tx = T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \qquad \text{para cada } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p,$$

al que es habitual referirse como *operador desplazamiento hacia la derecha*.

Veamos en primer lugar que dicho operador T carece de autovalores. En efecto, pues si existieran $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ satisfaciendo que $Tx = \lambda x$, tendríamos que en particular $0 = \lambda x_1$, o equivalentemente, $\lambda = 0$ o $x_1 = 0$. Así pues, razonando por recurrencia, acabaríamos concluyendo que $x = 0 \in \ell_p$ en ambos casos. Luego $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Sin embargo, $0 \in \sigma(T)$. En efecto, pues el operador $T = T - 0I$ no es invertible. Basta observar que la sucesión $(1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ no es imagen por T de ninguna sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$; luego T no es sobreyectivo.

Además, para dicho operador T, también somos capaces de indicar ejemplos inmediatos de subespacios cerrados, no triviales e invariantes para T. Por ejemplo,

$$Y = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p \colon x_1 = 0\} \subset \ell_p$$

es un subespacio cerrado —pues $Y = {\pi_1}^{-1}(\{0\})$ si $\pi_1 : \ell_p \longrightarrow \mathbb{C}$ es la proyección de la primera coordenada, que es una aplicación continua— tal que $\{0\} \neq Y \neq \ell_p$ y $T(Y) \subset Y$. En realidad, para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio vectorial $T^n(Y) = T \circ \cdots \circ T(Y)$ es un subespacio cerrado invariante y no trivial.

A día de hoy, se conocen ejemplos de espacios de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y operadores $T \colon X \longrightarrow X$ satisfaciendo las condiciones del Problema 2.1 anterior que carecen de subespacios invariantes cerrados no triviales. Así pues, la respuesta al Problema 2.1 anterior es, en general, negativa.

El primero de estos ejemplos, se debe al matemático (y pianista) sueco P. Enflo, quien en 1981 (ver [11]) construyó un novedoso e intrincado espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ en el que existen operadores $T \colon X \longrightarrow X$ sin subespacios cerrados e invariantes no triviales. Años más tarde, el matemático inglés C. Read proporcionará en [18] ejemplos notablemente más sencillos e interesantes, pues mostrará operadores sin subespacios invariantes cerrados y no triviales definidos en c_0 y ℓ_1 (ejemplos clásicos de espacios de Banach). Algunos aspectos de uno de estos ejemplos serán presentados y discutidos en el Capítulo 4.

Como acabamos de explicar, el Problema del subespacio invariante está resuelto en el marco de los espacios de Banach. No obstante, si exigimos ciertas propiedades (naturales) sobre el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ en cuestión, el interrogante se mantiene.

En particular, las siguientes cuestiones no tienen respuesta conocida a día de hoy.

Problema 2.3 (Problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$ y $T\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal y acotado.*

¿Existe $V \subset \mathcal{H}$ subespacio cerrado en $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ tal que $\{0\} \neq V \neq \mathcal{H}$ tal que $T(V) \subset V$?

Es decir, si

$$\ell_2 = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\colon \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \Big\}$$

y $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es una aplicación lineal y continua,

¿existe $V \subset \ell_2$ subespacio cerrado no trivial e invariante para T?

Problema 2.4 (Problema del subespacio invariante en espacios de Banach reflexivos)**.** *Sea X un espacio de Banach separable, reflexivo y de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$ y $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal y acotado.*

¿Existe $V \subset X$ subespacio cerrado en $(X, \|\cdot\|)$ tal que $\{0\} \neq V \neq X$ tal que $T(V) \subset V$?

Es decir,

¿existe $V \subset X$ subespacio cerrado no trivial e invariante para T?

Una vez conocida la respuesta negativa para el Problema 2.1 anterior, resulta ahora especialmente interesante preguntarnos para qué clases de operadores o para qué clase de espacios de Banach sí se tiene una respuesta afirmativa.

Un comienzo razonable consiste en preguntarnos qué ocurre con los operadores más sencillos que conocemos; esto es, con los operadores de rango finito (aquellos cuya imagen es un espacio vectorial de dimensión finita). En tal caso, la solución para el Problema 2.1 es inmediata y claramente afirmativa: la propia imagen del operador de rango finito es un subespacio cerrado invariante y no trivial.

En el siguiente paso, debemos considerar una familia de operadores más general que la de los operadores de rango finito. La familia de los operadores compactos parece un buen candidato; recordemos que un operador $Y \in \mathcal{B}(X)$ se dice compacto si "envía" conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

Los operadores compactos están íntimamente relacionados con los operadores de rango finito. Por un lado, es inmediato que todo operador de rango finito es compacto. Además, si X es un espacio de Hilbert, todo operador compacto es límite en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ de una sucesión de operadores de rango finito. Tal propiedad también es cierta en muchos espacios de Banach. Más concretamente, se dice que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ satisface *la propiedad de aproximación* si todo operador compacto $T\colon X \longrightarrow X$ puede ser aproximado por operadores de rango finito. No obstante, tal y como mostró P. Enflo en [10], existen espacios de Banach que no satisfacen la propiedad de aproximación.

Planteamos entonces el siguiente problema para operadores compactos.

Problema 2.5 (Problema del subespacio invariante (en espacios de Banach)).
Sea X un espacio de Banach separable sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $T\colon X \longrightarrow X$ un operador compacto.

¿Existe $V \subset X$ subespacio cerrado en $(X, \|\cdot\|)$ tal que $\{0\} \neq V \neq X$ tal que $T(V) \subset V$?

Es decir,

¿existe $V \subset X$ subespacio cerrado no trivial e invariante para T?

El Problema 2.5 anterior es realmente interesante. Sorprendentemente (o no), la respuesta es afirmativa.

Como veremos en este Trabajo Fin de Grado, el conocido como **Teorema del subespacio invariante de Lomonosov** nos proporcionará una respuesta muy completa. En efecto, pues el resultado obtenido por V. Lomonosov en [15] afirma que:

¡todo operador que conmute con otro no escalar que a su vez conmute con un operador compacto no nulo tiene subespacios cerrados e invariantes no triviales!

2.2. Resultados elementales

En esta sección introduciremos algunos conceptos elementales directamente relacionados con la formulación del Problema 2.1 (Problema del subespacio invariante). Justificaremos también la necesidad e interés de algunas de las condiciones e hipótesis incluidas en la formulación de dicho problema.

2.2.1. Subespacios invariantes e hiperinvariantes

Empecemos con algunas definiciones elementales.

Definición 2.6 (Subespacios invariantes & subespacios hiperinvariantes).
Sea X un espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(X)$. Diremos que un subespacio $V \subset X$ es:

(a) *T-invariante* si $T(V) \subset V$;

(b) *T-hiperinvariante* si V es S-invariante para todo $S \in \mathcal{B}(X)$ que conmute con T;

(c) *no trivial* si $\{0\} \neq V \neq X$.

Definición 2.7 (Órbita de un vector por un operador).
Sea X un expacio vectorial, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $x \in X$. Definimos entonces:

(a) la *órbita de x por T* como el conjunto $\{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$;

(b) la *T-órbita de x*, que será denotada por $\mathcal{O}_T(x)$, como el espacio vectorial generado por la órbita de T; esto es, $\mathcal{O}_T(x) = \operatorname{span}\{T^n x \colon n \in \mathbb{N}_0\}$.

Además, si X es un espacio de vectorial normado y $T \in \mathcal{B}(X)$, diremos entonces que:

(c) el vector x es *T-cíclico* si $\overline{\mathcal{O}_T(x)} = X$;

(d) el operador T es *cíclico* si existe algún vector $x \in X$ que sea T-cíclico.

Definición 2.8 (Aplicación lineal escalar).
Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En tal caso, diremos que $T \in \mathcal{L}(X)$ es una aplicación lineal *escalar* si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T = \lambda \operatorname{Id}_X$, siendo $\operatorname{Id}_X \in \mathcal{L}(X)$ la aplicación identidad.

Es inmediato que todo operador escalar T definido en un espacio de Banach X con $\dim X > 1$ admite subespacios cerrados e invariantes no triviales; basta considerar el subespacio generado por un vector no nulo.

Sin embargo, en general, un operador escalar T no admite subespacios cerrados e hiperinvariantes no triviales. En efecto, pues en caso contrario llegaríamos a una solución positiva para el Problema del subespacio invariante: dado $S \in \mathcal{B}(X)$, como el operador escalar T conmuta con S, existiría un subespacio cerrado, no trivial e invariante para S.

El siguiente resultado nos permitirá justificar la necesidad de la condición "subespacio cerrado" en el Problema 2.1 (problema del subespacio invariante).

Proposición 2.9 (Subespacios invariantes —no cerrados— en dimensión infinita).
Si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, toda aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(X)$ admite un subespacio T-invariante no trivial.

Demostración.
Dado $x \in X \setminus \{0\}$, sea $\mathcal{O}_T(x) \neq \{0\}$ la T-órbita de x. Si $\mathcal{O}_T(x) \neq X$, es entonces claro que $\mathcal{O}_T(x)$ es un subespacio T-invariante no trivial.

Supongamos entonces que $\mathcal{O}_T(x) = X$. En tal caso, la órbita de x por T es linealmente independiente en X. En efecto, pues si suponemos que para $0 \leq i \leq n$ existen $\lambda_i \in \mathbb{K}$ de modo que $\lambda_0 x + \lambda_1 Tx + \cdots + \lambda_n T^n x = 0$ con $\lambda_n \neq 0$, entonces

$$T^n x = -\lambda_n{}^{-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 Tx + \cdots + \lambda_{n-1} T^{n-1} x) \in \operatorname{span}\{T^i x \colon 0 \leq i \leq n-1\},$$

de donde concluiríamos que $\dim X = \dim \mathcal{O}_T(x) \leq n$; lo cual es falso.

Por tanto, para cada $y \in X$, existe un único conjunto de coeficientes $\{\lambda_i(y), 0 \leq i \leq m_y\}$ de modo que $y = \sum_{i=0}^{m_y} \lambda_i(y) T^i x$. Consideremos ahora el funcional lineal $\Phi \colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\Phi(y) = \sum_{i=0}^{m_y} \lambda_i(y), \quad \text{para cada } y = \sum_{i=0}^{m_y} \lambda_i(y) T^i x \in X.$$

Probaremos que $\operatorname{Ker} \Phi \subset X$ es un subespacio T-invariante no trivial.

Para ello, observemos que si $y = \sum_{i=0}^{m_y} \lambda_i(y) T^i x$, entonces $Ty = \sum_{i=0}^{m_y} \lambda_i(y) T^{i+1} x$. Por tanto, $\Phi(Ty) = \Phi(y) = 0$ para todo $y \in \operatorname{Ker} \Phi$; luego ya tenemos probado que $\operatorname{Ker} \Phi$ es un subespacio T-invariante. Además, dado que $\Phi(x) = 1 \neq 0$ y $\Phi(x - Tx) = 0$ para $x - Tx \neq 0$, concluimos finalmente que $\{0\} \neq \operatorname{Ker} \Phi \neq X$. □

Corolario 2.10.
Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ admite un subespacio (no necesariamente cerrado) T-invariante no trivial.

A la hora de buscar subespacios invariantes cerrados, resultará muy útil el siguiente lema, pues nos permite extender cualquier subespacio (hiper)invariante a otro subespacio (hiper)invariante que además es cerrado.

Lema 2.11 (Sobre la clausura de un subespacio (hiper)invariante).
Sea X un espacio vectorial normado y $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador. En tal caso, si V es un subespacio T-(hiper)invariante, $\overline{V}$ también es un subespacio T-(hiper)invariante.

Demostración.

Dado $x \in \overline{V}$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $x_n \to x$. Ahora bien, como V es T-invariante, $Tx_n \in V$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y así, puesto que $Tx_n \to Tx$, concluimos entonces que $\overline{V}$ es T-invariante.

Para probar la T-hiperinvarianza de $\overline{V}$, observemos que dado $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que $TS = ST$ y $x \in \overline{V}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $x_n \to x$. Ahora bien, como V es T-hiperinvariante, $Sx_n \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, puesto que $Sx_n \to Sx$, concluimos entonces que $\overline{V}$ es T-hiperinvariante. □

Proposición 2.12 (Vectores cíclicos & subespacios cerrados e invariantes)**.**
Si X es un espacio de Banach, el operador $T \in \mathcal{B}(X)$ admite un subespacio cerrado ivariante no trivial si y sólo si existe un vector $x \in X \setminus \{0\}$ que no es T-cíclico.

Demostración.

Supongamos que existe un subespacio cerrado T-invariante no trivial $V \subset X$. Sea $x \in V\setminus\{0\}$. En tal caso, dado que V es T-invariante, la órbita de x por T es un subconjunto de V y entonces $\mathcal{O}_T(x) \subset V$. Además, como V es cerrado y no trivial, deducimos que $\overline{\mathcal{O}_T(x)} \subset V \subsetneq X$; luego x no es T-cíclico.

Por otra parte, supongamos ahora que existe $x \in X \setminus \{0\}$ de modo que x no es T-cíclico. Teniendo en cuenta que $\mathcal{O}_T(x)$ siempre es un subespacio T-invariante, concluimos que $\overline{\mathcal{O}_T(x)}$ es T-invariante en virtud del Lema 2.11 anterior. Además, $x \in \mathcal{O}_T(x) \neq \{0\}$ y $\overline{\mathcal{O}_T(x)} \neq X$; luego $\overline{\mathcal{O}_T(x)}$ es un subespacio cerrado T-invariante no trivial. □

Corolario 2.13 (Subespacios cerrados e invariantes en espacios no separables)**.**
Si X es un espacio de Banach no separable, todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ admite un subespacio cerrado invariante no trivial.

Demostración.

En virtud de la Proposición 2.12 anterior, basta probar que existe un vector $x \in X\setminus\{0\}$ de modo que x no es T-cíclico.

Sea $x \in X \setminus \{0\}$ arbitrario. En tal caso, dado que el conjunto

$$\left\{q_0x + q_1T^1x + \cdots + q_nT^nx \colon q_i \in \mathbb{Q}\,(+i\mathbb{Q}),\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

es numerable y denso en $\overline{\mathcal{O}_T(x)}$, el subespacio $\overline{\mathcal{O}_T(x)}$ es separable. Por tanto, $\overline{\mathcal{O}_T(x)} \neq X$ y en consecuencia, x no es T-cíclico. □

El Corolario 2.13 anterior nos permite afirmar que el Problema 2.1 (Problema del subespacio invariante) tiene solución afirmativa para espacios de Banach no separables. Es decir, la condición “X espacio de Banach separable” es de vital importancia en el enunciado del problema.

2.2.2. El Problema del subespacio invariante en dimensión finita

Como ya dijimos anteriormente, en espacios de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, el Teorema Fundamental del álgebra nos permite obtener subespacios cerrados hiperinvariantes sencillos. Sin embargo, los espacios de Banach de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ presentan una cierta irregularidad en este sentido.

El siguiente resultado proporciona una solución concisa y detallada para el Problema del subespacio invariante en el caso finito dimensional.

Para evitar casos triviales, es necesario suponer que la dimensión del espacio en cuestión es mayor que uno. Sea entonces $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $\dim X = n > 1$.

Teorema 2.14 (Subespacios (cerrados) e (hiper)invariantes en dimensión finita)**.**

(*a*) *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, todo operador no escalar* $T \in \mathcal{B}(X) \equiv \mathcal{L}(X)$ *admite un subespacio hiperinvariante no trivial.*

(*b*) *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y*

(*i*) $\dim X$ *es impar, todo operador no escalar* $T \in \mathcal{B}(X)$ *admite un subespacio hiperinvariante no trivial;*

(*ii*) *y* $\dim X = 2$*, existe un operador* $T \in \mathcal{B}(X)$ *no escalar que no tiene subespacios invariantes no triviales;*

(*iii*) *y* $\dim X \geq 4$ *es par, todo operador* $T \in \mathcal{B}(X)$ *admite un subespacio invariante no trivial.*

Demostración.
(*a*)
Si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, en virtud del Teorema fundamental del álgebra, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T. En tal caso, dado que T no es escalar, es fácil ver que el autoespacio $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_X)$ es un subespacio (cerrado) T-hiperinvariante no trivial (ver Lema 2.29 siguiente).

(*b*)
Sea $\dim X = n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Si n es impar, dado que los autovalores complejos aparecen en pares conjugados, debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de T. En tal caso, dado que T no es escalar, concluimos como anteriormente que $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_X)$ es un subespacio (cerrado) T-hiperinvariante no trivial.

(*ii*) Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ el operador dado por una rotación de ángulo $\varphi \in (0, \pi) \subset \mathbb{R}$. Dado que los subespacios (cerrados) no triviales de $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por el origen $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, es entonces claro que T no admite ningún subespacio (cerrado) invariante no trivial.

Observemos que la representación matricial del operador T anterior viene dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(*iii*) Consideremos el espacio de Banach complejo $X_{\mathbb{C}} = X \oplus iX$ y el operador $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}(X_{\mathbb{C}})$ correspondiente. Recordemos que $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$ para cada $(u, v) \in X_{\mathbb{C}}$. Dado que T no es escalar, el operador $T_{\mathbb{C}}$ tampoco es escalar.

En tal caso, existen $\alpha \in \mathbb{C}$ y $z = x + iy \in X_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ de modo que $Tz = \alpha z$. Es decir, existe $z \in X_{\mathbb{C}}$ autovector de $T_{\mathbb{C}}$ con α como autovalor asociado.

Sea $V \subset X$ el subespacio generado por los vectores x e $y \in X$; es decir, $V = \operatorname{span}\{x, y\}$. Las condiciones $\dim X > 2$ y $(x, y) \neq (0, 0) \in X \times X$ aseguran que V es un subespacio no trivial de X. Además, dado que $T_{\mathbb{C}}(x+iy) = Tx+iTy = \alpha(x+iy)$,

$$Tx = \operatorname{Re}(\alpha)\, x - \operatorname{Im}(\alpha)\, y \in V \quad \text{y} \quad Ty = \operatorname{Im}(\alpha)\, x + \operatorname{Re}(\alpha)\, y \in V.$$

Por tanto, V es un subespacio (cerrado) T-invariante no trivial. $\square$

El Teorema 2.14 anterior prueba que las condiciones "$\mathbb{K} = \mathbb{C}$" "X espacio de Banach de dimensión infinita" son de vital importancia en el enunciado del Problema 2.1 (Problema del subespacio invariante) si queremos asegurar el interés del mismo.

Finalizamos este epígrafe mostrando un ejemplo de aplicación lineal en $\mathbb{R}^4$ sin subespacios hiperinvariantes.

Ejemplo 2.15 (Operador en $\mathbb{R}^4$ sin subespacios hiperinvariantes.)**.**
Dado un mútiplo irracional θ de 2π, consideremos el operador $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (R_\theta(x_1, x_2), R_\theta(x_3, x_4)), \quad \text{para cada } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

donde R_θ es la rotación de ángulo θ en $\mathbb{R}^2$.

Sean además los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$V_L = \{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad V_R = \{(0, 0, x_1, x_2) : x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{y}$$

$$V_{\beta,\gamma} = \{(x_1, x_2, \gamma R_\beta(x_1, x_2) : x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad \text{con } \beta \in [0, 2\pi) \text{ y } \gamma > 0.$$

Es inmediato que V_L y V_R son dos subespacios cerrados T-invariantes no triviales. Por otra parte, teniendo en cuenta la conmutatividad de los giros en $\mathbb{R}^2$, deducimos que para cada $\beta \in [0, 2\pi)$ y $\gamma > 0$, el subespacio (cerradp) $V_{\beta,\gamma}$ es T-invariante y no trivial.

A continuación, veremos que los subespacios vectoriales mencionados anteriormente son los únicos subespacios T-invariantes no triviales. Para ello, sea V un subespacio T-invariante no trivial arbitrario y $0 \neq (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$.

(*a*) Si $(x_3, x_4) = (0, 0)$, entonces $V = V_L$.

Por ser V un subespacio T-invariante, $(R_\theta(x_1, x_2), 0, 0) \in V$. Además, dado que θ no es un múltiplo entero de π, los vectores $(x_1, x_2, 0, 0)$ y $(R_\theta(x_1, x_2), 0, 0)$ son linealmente independientes. Por tanto $V_L \subset V$.

Supongamos ahora que existe $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$ con $(y_3, y_4) \neq (0, 0)$. En tal caso, dado que —por lo dicho anteriormente— $(0, 0, y_3, y_4) \in V$, la T-invarianza de V implica que $(0, 0, R_\theta(y_3, y_4)) \in V$. No obstante $(0, 0, y_3, y_4)$ y $(0, 0, R_\theta(y_3, y_4))$ son dos vectores son linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$, por lo que tendríamos entonces que $V_R \subset V$, de donde se deduciría que V es trivial, pues sería $V = \mathbb{R}^4$.

(*b*) Si $(x_1, x_2) = (0, 0)$, entonces $V = V_R$.

Análogo al caso anterior.

(*c*) Si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ y $(x_3, x_4) \neq (0, 0)$, entonces $V = V_{\beta,\gamma}$ para cierto $\beta \in [0, 2\pi)$ y $\gamma > 0$.

En este caso, existen una (única) rotación y una (única) homotecia en $\mathbb{R}^2$ cuya composición lleva (x_1, x_2) en (x_3, x_4). Sea $(x_3, x_4) = \gamma R_\beta(x_1, x_2)$ para cierto $\beta \in [0, 2\pi)$ y $\gamma > 0$. Por tanto, por T-invariancia,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1, x_2, \gamma R_\beta(x_1, x_2)) = (R_\theta(x_1, x_2), \gamma R_{\theta+\beta}(x_1, x_2)) \in V.$$

Puesto que (x_1, x_2) y $R_\theta(x_1, x_2)$ son dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, para cada $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $(y_1, y_2) = a(x_1, x_2) + bR_\theta(x_1, x_2)$. Por tanto,

$$(y_1, y_2, \gamma R_\beta(y_1, y_2)) = a(x_1, x_2, \gamma R_\beta(x_1, x_2)) + b(R_\theta(x_1, x_2), \gamma R_\beta R_\theta(x_1, x_2)) \in V,$$

de donde deducimos que $V_{\beta,\gamma} \subset V$.

Supongamos ahora que existe un vector $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V \setminus V_{\beta,\gamma}$. En tal caso, dado que $Ty \in V \setminus V_{\beta,\gamma}$ —en otro caso, $R_\theta(y_3, y_4) = \gamma R_\beta R_\theta(y_1, y_2) = R_\theta \gamma R_\beta(y_1, y_2)$ y, por inyectividad, $(y_3, y_4) = \gamma R_\beta(y_1, y_2)$—, tendríamos que Ty e y son dos vectores linealmente independientes en $V \setminus V_{\beta,\gamma}$, que junto con x y $Tx \in V_{\beta,\gamma}$ formarían un conjunto de cuatro vectores de V linealmente independientes. Luego $V = \mathbb{R}^4$, en contradicción con la no trivialidad de V.

Finalmente, veamos que ninguno de los subespacios anteriores es hiperinvariante, probando así que T no tiene subespacios hiperinvariantes no triviales.

Sea $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ el operador dado por

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, x_1, x_2), \quad \text{para cada } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Es inmediato que $ST = TS$ y —claramente— V_R y V_L no son S-invariantes.

Por otra parte, tomemos $\alpha \in (0, \pi)$ y definimos $R : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ el operador dado por

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, R_\alpha(x_3, x_4)), \quad \text{para cada } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Nuevamente, en virtud de la conmutatividad de los giros en $\mathbb{R}^2$, es claro que $TR = RT$.

Veamos ahora que para cada par β, γ con $\beta \in [0, 2\pi)$ y $\gamma > 0$, el subespacio $V_{\beta,\gamma} \subset \mathbb{R}^4$ no es R-invariante. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, tenemos que

$$R(x_1, x_2, \gamma R_\beta(x_1, x_2)) = (x_1, x_2, R_\alpha(\gamma R_\beta(x_1, x_2)) = (x_1, x_2, \gamma R_\beta(R_\alpha(x_1, x_2)).$$

Por tanto, debida a la inyectividad de los giros, $R(x_1, x_2, \gamma R_\beta(x_1, x_2)) \in V_{\beta,\gamma}$ si y sólo si $R_\alpha(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Pero por ser $\alpha \in (0, \pi)$, el único punto fijo de R_α es $(0, 0)$.

En consecuencia, dado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_{\beta,\gamma}$, con $x \neq 0$, se tiene que $R(x) \notin V_{\beta,\gamma}$ y por tanto $V_{\beta,\gamma}$ no es R invariante.

2.3. Más resultados

En adelante y siempre que no especifiquemos lo contrario, consideraremos que X e Y son espacios de Banach de dimensión infinita; además, con la expresión *"subespacio (hiper)invariante"* nos referiremos a un subespacio cerrado e (hiper)invariante.

2.3.1. Existencia de subespacios invariantes I

A continuación, veremos algunos resultados que nos permiten obtener subespacios invariantes (y en algunos casos hiperinvariantes) de forma inmediata o relativamente simple.

Proposición 2.16 (Subespacios invariantes "inmediatos").
Para $T \in \mathcal{B}(X)$, los conjuntos $\operatorname{Ker} T$ e $\overline{\operatorname{Im} T}$ son subespacios T-hiperinvariantes.

Demostración.

Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que $TS = ST$ escogido de forma arbitraria.

Si $x \in \operatorname{Ker} T$, entonces $T(Sx) = S(Tx) = 0$; luego $Sx \in \operatorname{Ker} T$. Es decir, $\operatorname{Ker} T$ es un subespacio T-hiperinvariante.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{Im} T$, existe $y \in X$ tal que $x = Ty$. Así pues, $Sx = S(Ty) = T(Sy)$, lo que implica que $Sx \in \operatorname{Im} T$. Es decir, $\operatorname{Im} T$ también es un subespacio T-hiperinvariante. En virtud del Lema 2.11, se sigue que $\overline{\operatorname{Im} T}$ es un subespacio hiperinvariante. □

Conviene observar que $\operatorname{Ker} T = T^{-1}\{0\}$; luego $\operatorname{Ker} T$ es un subespacio cerrado de X por ser T una aplicación continua. Sin embargo, $\operatorname{Im} T$ no es, necesariamente, un subespacio cerrado de X.

A continuación, partiendo del concepto de operador cuasi-invertible, obtendremos dos importantes resultados sobre la existencia de subespacios invariantes no triviales para un operador $T \in \mathcal{B}(X)$.

Definición 2.17 (Operador cuasi-invertible)**.**
Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ entre dos espacios de Banach X e Y se dice cuasi-invertible si $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ —i.e. T es inyectivo— e $\operatorname{Im} T$ es denso en Y.

Corolario 2.18 (Cond. suficiente para la existencia de subespacio invariante no trivial)**.**
Si un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ conmuta con un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ no cuasi-invertible, T admite un subespacio invariante no trivial.

Demostración.

Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.16 anterior. □

Corolario 2.19 (Cond. necesaria para la inexistencia de subespacio invariante no trivial)**.**
Si un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ no admite subespacios invariantes no triviales, todo operador $S \in \mathcal{B}(X)$ que conmuta con T es cuasi-invertible.

Demostración.

Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.16 anterior. □

Ahora, empleando las nociones que se introducen en la siguiente definición, veremos como partiendo de la existencia de subespacios (hiper)invariantes para cierto operador S "parecido a T", podemos deducir la existencia de subespacios (hiper)-invariantes para T. Para ver más detalles sobre esta idea, puede consultarse [5].

Definición 2.20 (Operadores "parecidos")**.**
Dados dos operadores $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$, se dice que:

(*a*) $R \in \mathcal{B}(X, Y)$ *enlaza a T con S* si $RT = SR$;

(*b*) $R \in \mathcal{B}(X, Y)$ *enlaza densamente a T con S* si R enlaza a T con S e $\operatorname{Im} R$ es denso en Y;

(*c*) T y S son *similares* si existe un operador invertible $R \in \mathcal{B}(X, Y)$ que enlaza a T con S;

(*d*) T y S son *cuasi-similares* si existen dos operadores cuasi-invertibles $R_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $R_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ enlazando a T con S y a S con T, respectivamente.

Nota 2.21.

Observemos que un operador $R \in \mathcal{B}(X,Y)$ enlaza a $T \in \mathcal{B}(X)$ con $S \in \mathcal{B}(Y)$ si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \downarrow{\scriptstyle R} & & \downarrow{\scriptstyle R} \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

En tal caso, $RT^n = S^n R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $R\,p(T) = p(S)\,R$ para todo polinomio p. Observemos también que si $R \in \mathcal{B}(X,Y)$ es un operador invertible que enlaza a $T \in \mathcal{B}(X)$ con $S \in \mathcal{B}(Y)$, entonces $R^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ enlaza a S con T.

Evidentemente, todo operador invertible es cuasi-invertible, luego si T y S son similares también son cuasi-similares.

Proposición 2.22 (Operadores densamente enlazados & vectores cíclicos)**.**
Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador densamente enlazado a $S \in \mathcal{B}(Y)$ mediante $R \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $x \in X$ es un vector T-cíclico, entonces $Rx \in Y$ es S-cíclico.

Demostración.

Teniendo en cuenta que $RT^n = S^n R$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$R(\mathcal{O}_T(x)) = R(\operatorname{span}\{T^n x \colon n \in \mathbb{N}_0\}) = \operatorname{span}\{RT^n x \colon n \in \mathbb{N}_0\} = \operatorname{span}\{S^n Rx \colon n \in \mathbb{N}_0\}$$

y entonces, dado que $x \in X$ es T-cíclico y R es continuo,

$$R(X) = R(\overline{\mathcal{O}_T(x)}) = R(\overline{\operatorname{span}\{T^n x \colon n \in \mathbb{N}_0\}}) \subset \overline{\operatorname{span}\{S^n Rx \colon n \in \mathbb{N}_0\}}.$$

Así pues, dado que $\operatorname{Im} R$ es denso en Y,

$$Y = \overline{R(X)} \subset \overline{\operatorname{span}\{S^n Rx \colon n \in \mathbb{N}_0\}};$$

luego debe ser $Y = \overline{\operatorname{span}\{S^n Rx \colon n \in \mathbb{N}_0\}}$ y queda entonces probado que $Rx \in Y$ es un vector S-cíclico. $\square$

Proposición 2.23 (Operadores densamente enlazados & subespacios invariantes)**.**
Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador densamente enlazado a $S \in \mathcal{B}(Y)$ mediante $R \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $V \subset Y$ es un subespacio S-invariante no trivial tal que $R(X) \cap V \neq \{0\}$, entonces $R^{-1}(V)$ es un subespacio T-invariante no trivial.

Demostración.

Inicialmente, observemos que $R^{-1}(V)$ es un subespacio cerrado de X por ser $V \subset Y$ un subespacio cerrado y $R \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación continua.

Por otra parte, la condición $R(X) \cap V \neq \{0\}$ asegura que $R^{-1}(V) \neq \{0\}$. Además, si fuese $R^{-1}(V) = X$, tendríamos entonces que $R(X) \subset V$, pero como $\overline{R(X)} = Y$, se seguiría que $V = Y$, contradiciendo así el carácter no trivial de V. Por tanto $R^{-1}(V)$ es un subespacio no trivial de X.

Por último, la T-invarianza de $R^{-1}(V)$ es clara. En efecto, pues al ser

$$RTR^{-1}(V) = SRR^{-1}(V) \subset S(V) \subset V,$$

tenemos que

$$T(R^{-1}(V)) \subset R^{-1}(RT(R^{-1}(V))) \subset R^{-1}(V). \qquad \square$$

Teorema 2.24 (Operadores similares & subespacios invariantes).
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ dos operadores similares. En tal caso, si uno tiene un subespacio invariante no trivial, el otro también.

Demostración.
Supongamos que S tiene un subespacio invariante no trivial $V \subset Y$.

Dado que S y T son similares, existe un operador invertible $R \in \mathcal{B}(X, Y)$ enlazando a T con S. Por ser R invertible, $\operatorname{Im} R = Y$ y entonces R enlaza densamente a T con S; además, $R(X) \cap V = V \neq \{0\}$. Por tanto, en virtud de la Proposición 2.23 anterior, $R^{-1}(V)$ es un subespacio T-invariante no trivial.

Puesto que "ser similares" es una propiedad simétrica, de lo probado anteriormente se deduce que si T tiene un subespacio invariante no trivial, entonces S también. $\square$

Definición 2.25 (Conmutador de un operador).
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X)$, denotaremos por $\{T\}'$ al *conmutador* de T; esto es:

$$\{T\}' = \{L \in \mathcal{B}(X) : LT = TL\}.$$

Dado un vector $x \in X$, emplearemos también la notación $M_x = \{Lx : L \in \{T\}'\}$.

Proposición 2.26.
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ dos operadores tales que:

(*a*) *$R_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ enlaza T a S y $R_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ enlaza S a T;*

(*b*) *V es un subespacio S-hiperinvariante no trivial;*

(*c*) *$\operatorname{Im} R_1$ es denso en Y;*

(*d*) *$\operatorname{Ker} R_2 \cap V = \{0\}$.*

En tal caso, $R_2(V) \neq \{0\}$ y $\overline{M_x} \subset X$ es un subespacio T-hiperinvariante no trivial para cada $x \in R_2(V) \setminus \{0\}$.

Demostración.
Sea $L \in \{T\}'$ escogido de forma arbitraria. Las siguientes identidades son entonces consecuencia inmediata de la hipótesis (*a*) anterior:

$$(R_1 L R_2)S = R_1 L T R_2 = R_1 T L R_2 = S(R_1 L R_2)$$

Así pues, como V es por hipótesis S-hiperinvariante, deducimos que $(R_1 L R_2)(V) \subset V$.

Inicialmente, probaremos que $\overline{M_x} \subset X$ es un subespacio no trivial. Dado que $x \neq 0$, es claro que $M_x \neq \{0\}$.

Por otra parte, sabemos que $x = R_2 z$ para cierto $z \in V$. En tal caso, dado $y \in M_x$, existe $L \in \{T\}'$ tal que $y = L R_2 z$ y así, teniendo en cuenta la $R_1 L R_2$-invariancia de V probada anteriormente, deducimos ahora que $R_1 y \in V$. Es decir, $R_1(M_x) \subset V$. Además, la continuidad de R_1 implica que $R_1(\overline{M_x}) \subset \overline{V} \subsetneq Y$ —pues V es no trivial– y entonces, como $\operatorname{Im} R_1$ es denso en Y, debe ser $\overline{M_x} \neq X$.

Finalmente, veamos que $\overline{M_x} \subset X$ es T-hiperinvariante. En virtud del Lema 2.11 anterior, basta probar que M_x es T-hiperinvariante. Sean entonces $P \in \{T\}'$ e $y = Lx \in M_x$ con $L \in \{T\}'$ dados; tenemos entonces que $Py = PLx$, pero teniendo en cuenta $PL \in \{T\}'$, deducimos luego que $Py \in M_x$; es decir, M_x es T-hiperinvariante. $\square$

Teorema 2.27 (Operadores cuasi-similares & subespacios hiperinvariantes).
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ dos operadores cuasi-similares. En tal caso, si uno de ellos admite un subespacio hiperinvariante no trivial, entonces el otro también.

Demostración.
Supongamos que el operador S tiene un subespacio hiperinvariante no trivial $V \subset Y$.

Dado que S y T son cuasi-similares, existen dos operadores cuasi-invertibles $R_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ —enlazando T a S— y $R_2 \in \mathcal{B}(Y, X)$ —enlazando S a T—. En particular, $\operatorname{Im} R_1$ es denso en Y y $\operatorname{Ker} R_2 = \{0\}$. Por consiguiente, se cumplen las hipótesis de la Proposición 2.26 anterior y se deduce entonces que existe un subespacio T-hiperinvariante no trivial.

Puesto que "ser cuasi-similares" es una propiedad simétrica, de lo probado anteriormente se deduce que si T tiene un subespacio hiperinvariante no trivial, entonces S también. □

Corolario 2.28 (Operadores similares & subespacios hiperinvariantes).
Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ dos operadores similares. En tal caso, si uno de ellos admite un subespacio hiperinvariante no trivial, entonces el otro también.

Demostración.
Si T y S son operadores similares, en particular, son cuasi-similares. Por tanto, en virtud del Teorema 2.27, si uno de ellos tiene un subespacio hiperinvariante no trivial, el otro también. □

2.3.2. Existencia de subespacios invariantes II

Otro método relativamente sencillo que nos permite obtener subespacios T-hiperinvariantes se basa en considerar los posibles autoespacios del operador $T \in \mathcal{B}(X)$ en cuestión.

En lo que sigue, si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \in \mathcal{B}(X)$, emplearemos la notación N_λ para referirnos al autoespacio $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \subset X$.

Lema 2.29 (Autoespacios & subespacios invariantes).
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces N_λ es un subespacio T-hiperinvariante. Además, si T no es escalar, N_λ es no trivial.

Demostración.
Inicialmente, observemos que por ser $T - \lambda I$ un operador acotado, $N_\lambda = (T - \lambda)^{-1}\{0\} \subset X$ es un subespacio cerrado. Además, un operador S conmuta con T si y sólo si S conmuta con $T - \lambda I$. Así pues, empleando la Proposición 2.16 anterior, deducimos que N_λ es un subespacio T-hiperinvariante.

Finalmente, observemos que si T no es escalar, existe entonces $x \in X$ tal que $Tx \neq \lambda x$; luego $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq X$. Por otra parte, como λ es autovalor de T, tenemos que $\operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq 0$. Es decir, N_λ es un subespacio cerrado T-hiperinvariante no trivial. □

Para probar la hiperinvariancia de N_λ no es necesario que el operador T sea acotado. Sin embargo, dicha hipótesis sí es esencial a la hora de asegurar que N_λ es un subespacio cerrado.

Lema 2.30 (Autovalores de T y T^{**}).
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de T, entonces λ es autovalor de T^{**}.

Demostración.

Sea $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$. En tal caso, la aplicación *evaluación en* x, que definimos como $j : X \longrightarrow X^{**}$ de forma que

$$j(x)(y^*) = y^*(x), \quad \text{para cada } y^* \in X^*,$$

es un aplicación lineal y acotada —pues $\|j(x)(y^*)\| \leq \|y^*\|\|x\|$ para todo $y^* \in X^*$—. Es decir, $j(x)$ es un funcional lineal y acotado en X^*; esto es, $j(x) \in X^{**}$.

Veamos ahora que $j(x)$ es un autovector de T^{**} asociado a λ. Para ello, observemos inicialmente que $j(x) \neq 0 \in X^{**}$ —esto es una consecuencia del Corolario 1.9, pues $x \neq 0$—; además, si $y^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned} T^{**}(j(x))(y^*) &= j(x)(T^*y^*) = T^*y^*(x) = y^*(Tx) \\ &= y^*(\lambda x) = \lambda y^*(x) = \lambda j(x)(y^*), \end{aligned}$$

quedando luego probado que $j(x)$ es un autovector de T^{**} asociado a λ. □

Lema 2.31 (Operador escalar & operador adjunto)**.**
T es un operador escalar si y solo si T^* es un operador escalar.

Demostración.

Si T es escalar, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Tx = \lambda x$ para todo $x \in X$. Por tanto, dado $x^* \in X^*$, tenemos que

$$(T^*x^*)x = x^*(Tx) = x^*(\lambda x) = \lambda x^*(x), \quad \text{para todo } x \in X;$$

es decir, $T^*x^* = \lambda x^*$ para todo $X^* \in X^*$. Luego T^* es escalar.

Por otra parte, si T^* es escalar, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T^*x^* = \lambda x^*$ para todo $x^* \in X^*$. Por tanto, dado $x \in X$, tenemos que

$$x^*(Tx) = (T^*x^*)(x) = \lambda x^*(x) = x^*(\lambda x), \quad \text{para cada } x^* \in X^*.$$

En consecuencia, empleando el Corolario 1.9 anterior, concluimos finalmente que $Tx = \lambda x$ para todo $x \in X$. Luego T es escalar. □

Dado un operador no escalar $T \in \mathcal{B}(X)$, el siguiente resultado —cuya demostración hará uso de Lema 2.31 que acabamos de probar— nos proporcionará una condición suficiente para la existencia de subespacios T-hiperinvariantes.

Teorema 2.32 (Operadores no escalares & subespacios hiperinvariantes)**.**
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador no escalar. Si T o T^* tienen un autovalor, entonces T y T^* admiten subespacios hiperinvariantes no triviales.

Demostración.

Inicialmente, probaremos que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T, entonces T admite un subespacio hiperinvariante no trivial. Para ello, basta tener en cuenta que, en virtud del Lema 2.29 anterior, N_λ es un subespacio cerrado T-hiperinvariante no trivial.

Veamos ahora que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T^*, entonces T admite un subespacio hiperinvariante no trivial. Más concretamente, probaremos que $V = \overline{(T - \lambda I)(X)}$ es un subespacio T-hiperinvariante no trivial.

Sea $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $T^*x^* = \lambda x^*$. Como T no es escalar, $T \neq \lambda I$ y entonces, $V \neq \{0\}$. Por otra parte, dado que $(\lambda I_X)^* = \lambda I_{X^*}$ y $T^*x^* = \lambda x^*$,

$$x^*(T - \lambda I_X)x = (T^* - \lambda I_{X^*})x^*x = 0, \quad \text{para todo } x \in X.$$

No obstante, como $x^* \neq 0$, la igualdad anterior implica que $V \neq X$. Por tanto, ya tenemos probado que $V \subset X$ es un subespacio cerrado no trivial.

Para probar la T-hiperinvarianza de V, sea $S \in \{T\}'$ escogido de forma arbitraria y observemos que, para todo $y = (T - \lambda I)x \in (T - \lambda)(X)$,

$$Sy = S(T - \lambda)x = (T - \lambda I)Sx.$$

Por tanto, la S-invarianza de V es ahora una consecuencia inmediata del Lema 2.11 anterior.

Para terminar la prueba del resultado enunciado, falta ver que en ambos casos (existencia de autovalor para T o existencia de autovalor para T^*), T^* admite un subespacio hiperinvariante no trivial. Para ello, observemos que:

- si T tiene un autovalor λ, dado que λ también es autovalor de T^{**} —ver Lema 2.30—, lo probado anteriormente asegura que T^* tiene un subespacio cerrado hiperinvariante no trivial.

- si T^* tiene un autovalor λ, el Lema 2.29 anterior afirma que N_λ es un subespacio cerrado hiperinvariante no trivial, pues T^* no es escalar —ver Lema 2.31—. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Lomonosov

Hasta ahora, tan sólo hemos obtenido algunos resultados (excesivamente) generales que nos permiten bien asegurar la existencia de subespacios invariantes no triviales, o bien saber cómo debe ser un operador sin subespacios invariantes no triviales. No obstante, tal modo de proceder no conduce en absoluto a una solución del Problema del subespacio invariante. Conviene observar, por ejemplo, que las hipótesis requeridas en muchos de los resultados antes mencionados son muy específicas y exigentes.

Así pues, en este capítulo nos aproximaremos al Problema del subespacio invariante restringiendo nuestro interés al caso de *operadores compactos* (ver Problema 2.5 anterior).

Para probar el *Teorema de Lomonosov*, objetivo principal de este capítulo, necesitaremos numerosas propiedades sobre el espectro de un operador compacto. Es por ello que la segunda sección de este capítulo estará dedicada enteramente al estudio de los operadores compactos en espacios de Banach.

Antes, en la primera sección, probaremos otro resultado imprescindible en la demostración del Teorema de Lomonosov: el Teorema de Gelfand sobre el radio espectral de un operador $T \in \mathcal{B}(X)$.

3.1. El Teorema de Gelfand

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para probar el Teorema de Gelfand (ver Teorema 3.4 siguiente) necesitaremos dos lemas auxiliares.

Lema 3.1 (Auxiliar para el Lema 3.2)**.**
Si T y $S \in \mathcal{B}(X)$ son dos operadores que conmutan, entones ST es invertible si y sólo si T y S son invertibles.

Demostración.
Es evidente que si T y $S \in \mathcal{B}(X)$ son invertibles, entonces ST también es invertible. Por otra parte, si suponemos que ST es invertible, como $ST = TS$ es inyectivo y sobreyectivo, deducimos pues que T y S son inyectivos y sobreyectivos; luego T y S son operadores biyectivos y acotados y entonces, por Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.26), T y S son invertibles. □

Lema 3.2 (Auxiliar para el Teorema 3.4)**.**
Si X es un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$\sigma(T^n) = \{\mu^n : \mu \in \sigma(T)\}, \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, en virtud del Teorema fundamental del álgebra, el polinomio $p(t) = t^n - \lambda$ se descompone en $\mathbb{C}$ como

$$p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n),$$

donde λ_i con $1 \leq i \leq n$ son las n raíces n-ésimas de λ.

Por tanto, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos escribir

$$T^n - \lambda \operatorname{Id}_X = (T - \lambda_1 \operatorname{Id}_X)(T - \lambda_2 \operatorname{Id}_X) \cdots (T - \lambda_n \operatorname{Id}_X).$$

Así, por inducción y empleando el Lema 3.1 anterior, es fácil probar que $T^n - \lambda \operatorname{Id}_X$ es invertible si y sólo si $(T - \lambda_i \operatorname{Id}_X)$ es invertible para cada $1 \leq i \leq n$. En consecuencia, $\lambda \in \sigma(T^n)$ si y sólo si existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\lambda_i \in \sigma(T)$.

Es decir, $\lambda \in \sigma(T^n)$ si y sólo si existe $\mu \in \sigma(T)$ tal que $\mu^n = \lambda$. □

Definición 3.3 (Radio espectral).
Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$. En tal caso, definimos el *radio espectral* de T como

$$r(T) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Teorema 3.4 (Teorema de Gelfand).
Si X es un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. En virtud del Lema 3.2 anterior, sabemos que $\sigma(T^n) = \{t^n : t \in \sigma(T)\}$; luego es claro que $r(T)^n = r(T^n)$. Además, en virtud de la Proposición 1.19 anterior, sabemos que $r(T^n) \leq \|T^n\|$. Luego $r(T)^n \leq \|T^n\|$, o equivalentemente, $r(T) \leq \|T^n\|^{1/n}$. Por tanto, ya hemos probado que

$$r(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}. \tag{3.1}$$

Por otra parte, siempre y cuando la serie converja, tendremos que

$$(\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} = \lambda^{-1}\Big(\operatorname{Id}_X - \frac{T}{\lambda}\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \in \mathcal{B}(X). \tag{3.2}$$

No obstante, el radio de convergencia ξ de la serie de Laurent anterior es

$$\xi = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

y entonces, dicha serie define un operador en $\mathcal{B}(X)$ si y solo si $|\lambda| > \xi$. Por tanto, dado que la aplicación $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C} \longmapsto (\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ es analítica (ver Nota 3.5 siguiente), se sigue que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda| < \xi$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$, de donde concluimos finalmente que

$$r(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}. \tag{3.3}$$

El resultado enunciado es ahora consecuencia inmediata de (3.1) y (3.3). □

Nota 3.5 (Sobre la analiticidad de la función resolvente).

Para probar la anliticidad en $\rho(T)$ de la aplicación $\lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C} \longmapsto (\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ observemos inicialmente que si $\lambda, \mu \in \rho(T)$, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1}(\mu \operatorname{Id}_X - T)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\mu^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \frac{T^{n-k}}{\mu^{n-k+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda \mu^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^k \mu^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda \mu^{n+1}} \frac{\lambda^{-n}(\lambda^{1+n} - \mu^{1+n})}{\lambda - \mu} \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\mu^{n+1}} \Big) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \big((\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} - (\mu \operatorname{Id}_X - T)^{-1} \big);\end{aligned}$$

es decir,

$$(\mu - \lambda)\,(\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1}(\mu \operatorname{Id}_X - T)^{-1} = (\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} - (\mu \operatorname{Id}_X - T)^{-1}. \tag{3.4}$$

Por tanto, para $\lambda_0 \in \rho(T)$ tenemos que, si $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id}_X - T)^{-1}\| < 1$, entonces

$$(\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \big[(\lambda_0 \operatorname{Id}_X - T)^{-1}\big]^{n+1}. \tag{3.5}$$

En efecto, pues en virtud de (3.4) sabemos que

$$(\lambda \operatorname{Id}_X - T)^{-1} \big[\operatorname{Id}_X - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id}_X - T)^{-1}\big] = (\lambda_0 \operatorname{Id}_X - T)^{-1} \tag{3.6}$$

con $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \operatorname{Id}_X - T)^{-1}\| < 1$ por hipótesis. Por tanto, en virtud el Teorema de C. G. Neumann (probado en *Análisis funcional en espacios de Hilbert*), el operador que aparece entre corchetes en (3.6) es invertible y su operador inverso es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \big[(\lambda_0 \operatorname{Id}_x - T)^{-1}\big]^n,$$

de donde ahora se sigue fácilmente la veracidad de (3.5) si tenemos en cuenta (3.6). Luego queda probado que la *aplicación resolvente* es analítica en $\rho(T)$.

3.2. Operadores compactos en espacios de Banach

Tal y como ya dijimos en la Sección 2.1 anterior, los operadores compactos pueden pensarse como una generalización de los operadores de rango finito. De hecho, tal y como veremos al final de esta sección, el espectro de un operador compacto es un conjunto relativamente sencillo que recuerda (en cierto sentido) al espectro de un operador de rango finito y también al caso finito dimensional sobradamente conocido.

Iniciamos esta sección introduciendo de forma rigurosa el concepto de operador compacto entre espacios de Banach. Sean X e Y dos espacios de Banach.

Definición 3.6 (Operador compacto).
Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se dice *compacto* si $T(B_X(0,1))$ es un subconjunto relativamente compacto de Y, i.e., $\overline{T(B_X(0,1))}$ es compacto. Denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y)$ el conjunto de operadores compactos de X en Y. Usaremos también $\mathcal{K}(X)$ para denotar $\mathcal{K}(X, X)$.

Es bien conocido que $\mathcal{K}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$. Además, teniendo en cuenta el siguiente resultado (probado en la materia de *Topología General*) sobre compacidad en espacios métrico completos, obtendremos una caracterización secuencial de la compacidad de un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Teorema 3.7 (Caracterización de compactos en espacios métricos completos).
Sea (M,d) un espacio métrico completo y $K \subset M$. En tal caso, son equivalentes:

(a) *K es un conjunto compacto;*

(b) *toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por vectores de K admite una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en K.*

Corolario 3.8 (Caracterización de operadores compactos en espacios de Banach).
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, son equivalentes:

(a) *T es un operador compacto;*

(b) *Para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión de imágenes $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.*

3.2.1. El espectro de un operador compacto

Tal y como veremos en este epígrafe, si X es un espacio de Banach arbitrario, el estudio de las propiedades espectrales de un operador compacto $T \in \mathcal{K}(X)$ es notablemente más complejo que lo ya visto en *Análisis funcional en espacios de Hilbert* para el caso en el que X es un espacio de Hilbert, donde disponíamos de la *descomposición de Schmidt*. No obstante, los resultados que obtendremos son análogos a los del caso hilbertiano.

Para conocer la estructura del espectro de un operador compacto (ver Corolario 3.14 siguiente), necesitaremos antes una serie de resultados auxiliares.

Lema 3.9 (Auxiliar para la Proposición 3.10).
Si $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $N_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_X)$ tiene dimensión finita.

Demostración.
Sea $V = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_X)$. En tal caso,

$$T_{|V} = \lambda \operatorname{Id}_{|V} \quad \text{y} \quad T(B_X \cap V) = T_{|V}(B_X \cap V) = \lambda(B_X \cap V).$$

Además, puesto que T es un operador compacto y $\overline{T(B_X \cap V)} \subset \overline{T(B_X)}$, deducimos entonces que $\overline{\lambda(B_X \cap V)} \subset X$ es un conjunto compacto (pues es un cerrado contenido en un compacto).

Por otra parte, observemos que V es un espacio de Banach, pues es un subespacio cerrado de X. Por tanto, si la dimensión de V es infinita, del lema de Riesz (véase el Corolario 1.25) se deduce que $\overline{B_X \cap V} = \overline{B_V}$ no es un conjunto compacto, hecho que contradice la compacidad de $\overline{\lambda(B_X \cap V)}$ (ya que ambos conjuntos son homeomorfos al ser $\lambda \neq 0$). Luego V tiene dimensión finita. □

Proposición 3.10 (Auxiliar para Lema 3.11 & Teorema 3.12).
Si $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $(\lambda \operatorname{Id}_X - T)(X)$ es un subespacio cerrado de X.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\lambda = 1$ y sea $S = \mathrm{Id}_X - T$ con $N = \operatorname{Ker} S$.

En tal caso, en virtud del Lema 3.9 anterior, N tiene dimensión finita y entonces, en virtud ahora del Teorema 1.29, N es complementado en X; esto es, $X = N \oplus M$ con $M \subset X$ subespacio cerrado.

Sea ahora, $S_0 \in \mathcal{B}(M, X)$ la restricción de S al subespacio M. Observemos que

$$X = S(X) = S_0(M) \quad \text{y} \quad {S_0}^{-1}(0) = N \cap M = \{0\};$$

luego S_0 es un operador biyectivo.

A continuación, probaremos que

$$\inf_{x \in S_M} \|S_0 x\| > 0 \quad \text{si} \quad S_M = \{x \in M : \|x\| = 1\}. \tag{3.7}$$

Supongamos que dicho ínfimo es nulo; llegaremos a una contradicción. Bajo tal supuesto, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_M$ tal que $\|S_0 x_n\| \to 0$. Ahora bien, como T es compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (por ser convergente), en virtud del Corolario 3.8 anterior, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $Tx_{n_k} \to y$. Por simplicidad, supongamos que $Tx_n \to y$: entonces —como $S + T = \mathrm{Id}_X$— se tiene que $x_n = (S_0 + T)x_n \to y$. Por tanto, las condiciones

$$\|y\| = 1, \quad S_0 x_n \to S_0 y \quad \text{y} \quad S_0 x_n \to 0$$

contradicen el carácter biyectivo de S_0 (pues $S_0 y = 0$ con $\|y\| = 1$).

Una vez probado (3.7), sabemos que existe $c > 0$ tal que

$$\|S_0 x\| > c\|x\|, \quad \text{para todo } x \in M.$$

En consecuencia, $S_0(M) = S(X) = (\lambda\,\mathrm{Id}_X - T)(X)$ es cerrado. En efecto, pues si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_0(M)$ es una sucesión tal que $y_n = S_0 x_n$ con $x_n \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y_n \to y$, entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{\|S_0(x_n - x_m)\|}{c} \to 0, \quad \text{cuando } n,\, m \to \infty,$$

de donde concluimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, luego convergente a un punto de M (por ser M cerrado).

Así pues, $S_0 x_n \to S_0 x = y \in S_0(M)$, finalizando así la prueba. □

Lema 3.11 (Auxiliar para el Teorema 3.12).
Sean $T \in \mathcal{K}(X)$, $S = \mathrm{Id}_X - T$ e $Y = S(X)$ un subespacio propio de X. En tal caso, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in B_X$ tal que $d(Tx_\varepsilon, T(Y)) > 1 - \varepsilon$.

Demostración.

En virtud de la Proposición 3.10 anterior, Y es un subespacio cerrado de X. Así, por el Lema de Riesz (Lema 1.24), para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in S_X$ tal que $d(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon$. En tal caso, dado que $Sx_\varepsilon \in Y$ y $T(Y) = (\mathrm{Id}_X - S)(Y) \subset Y$,

$$d(Tx_\varepsilon, T(Y)) \geq d(x_\varepsilon - Sx_\varepsilon, Y) = d(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon. \qquad \square$$

Ahora ya estamos en condiciones de probar que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_P(T)$. Tal resultado, junto con el Teorema 3.13 siguiente, nos permitirá conocer en detalle las propiedades fundamentales del espectro de un operador compacto.

Teorema 3.12 (Sobre el espectro de un operador compacto I).
Si $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$, entonces λ es un autovalor de T.

Demostración.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda = 1$. Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos luego que $\lambda = 1$ no es autovalor de T, es decir, que $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ para $S = \mathrm{Id}_X - T$. Para llegar a una contradicción, basta ver que S es invertible; pues en tal caso, $\lambda = 1 \notin \sigma(T)$.

Ahora bien, en virtud del Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.26), puesto que ya sabemos que S es inyectivo, basta probar que S es sobreyectivo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Y_n = S^n(X)$. Observemos que

$$Y_n = S^n(X) = S^{n-1}(S(X)) \subset S^{n-1}(X) = Y_{n-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, aplicando repetidas veces la Proposición 3.10 anterior, sabemos que $Y_n \subset X$ es un subespacio cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Y_N = Y_{N+1}$. En caso contrario, para cada n consideramos el operador $T_n : Y_n \longrightarrow Y_n$ dado por $T_n x = Tx$ para cada $x \in Y_n$. Así, puesto que Y_n es cerrado en X, se sigue entonces que Y_n es un espacio de Banach y además $T_n(Y_n) = T(S^n(X)) = S^n T(X) \subset S^n(X) = Y_n$, por lo que T_n está bien definido. Por la compacidad de T, es inmediato comprobar que T_n es un operador compacto. Por tanto, aplicando a T_n el Lema 3.11 anterior, deducimos la existencia de $y_n \in B_{Y_n}$ tal que

$$d(Ty_n, T(Y_{n+1})) > 1/2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\|Ty_n - Ty_m\| > 1/2$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, hecho que contradice la compacidad de T (pues $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sería una sucesión acotada para la que $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no admite subsucesiones convergentes).

A continuación, probaremos que —en realidad— $X = Y_0 = Y_1$. Nuevamente, procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos luego que $X \neq Y_1$ y sea $m \in \mathbb{N}$ el menor entero tal que $Y_{m-1} \neq Y_m = Y_{m+1}$. Ahora, observemos que dado $u \in Y_{m-1} \setminus Y_m$, tenemos que $Su \in Y_m = Y_{m+1}$. Por tanto, existe $v \in Y_m$ tal que $Su = Sv$ y $v \neq u$, pues $u \notin Y_m$. Así pues,

$$S(u - v) = 0, \quad \text{con } u - v \neq 0,$$

contradiciendo entonces el carácter inyectivo de S inicialmente supuesto.

Por consiguiente, debe ser $X = Y_0 = Y_1 = S(X)$; es decir, S es sobreyectivo. □

Teorema 3.13 (Sobre el espectro de un operador compacto II).
Sea $T \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$. En tal caso, $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > \varepsilon\}$ es un conjunto finito.

Demostración.
Inicialmente, probaremos que el conjunto de autovectores linealmente independientes que están asociados a autovalores con módulo mayor o igual que ε es finito.

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos luego que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \neq x_m$ para $n \neq m$, de autovectores de T asociados a autovalores $\lambda_i \in \mathbb{C}$ con $|\lambda_i| \geq \varepsilon$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$. Observemos luego que $X_n \subset X$ es un subespacio cerrado y propio (pues es de dimensión finita) tal que $T(X_n) = X_n$. En tal caso, en virtud del Lema de Riesz (Lema 1.24), existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que:

$$y_n \in X_n, \quad \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora, la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n/\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que es acotada (pues $\|z_n\| \leq 1/\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Probaremos que $(Tz_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no admite ninguna subsucesión convergente, hecho que contradice la compacidad de T.

Para ello, observemos que como $T(X_n) = X_n$, tenemos entonces que $Tz_n \in X_n$; además, $Tz_n - y_n \in X_{n-1}$. En efecto, pues si $y_n = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, entonces

$$Tz_n - y_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) c_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) c_k x_k \in X_{n-1}.$$

Por otro lado, si $n > m$, entonces $Tz_m \in X_m \subset X_{n-1}$ y $Tz_n - y_n \in X_{n-1}$. Por tanto,

$$\|Tz_n - Tz_m\| \geq d(Tz_n, X_{n-1}) = d(Tz_n - (Tz_n - y_n), X_{n-1}) = d(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2};$$

quedando luego probada la afirmación que iniciaba la prueba.

Para finalizar, basta recordar que autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes. Por tanto, como consecuencia de lo anterior, concluimos que $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > \epsilon\}$ es un conjunto finito. $\square$

Recogemos en el siguiente resultado las propiedades elementales del espectro de un operador compacto.

Corolario 3.14 (Sobre el espectro de un operador compacto III)**.**
Sea $T \in \mathcal{K}(X)$. En tal caso, se satisface una de las siguientes condiciones:

(*a*) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ *con* $0 \neq \lambda_i \in \sigma_P(T)$ *para todo* $1 \leq i \leq N$;

(*b*) $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *con* $0 \neq \lambda_i \in \sigma_P(T)$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

Además, en ambos casos, el autoespacio asociado a cada autovalor λ_i es un espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración.
En primer lugar, observemos que por ser T compacto, $0 \in \sigma(T)$. En efecto, pues T no es invertible ya que para todo operador $S \in \mathcal{B}(X)$ la composición TS es un operador compacto y por tanto $TS \neq \mathrm{Id}_X$ (pues en dimensión infinita, en virtud del Corolario 1.25, la bola abierta de centro $0 \in X$ y radio $r > 0$ —que es un conjunto trivialmente acotado— no es relativamente compacto).

Veamos ahora que $\sigma(T)$ es un conjunto finito o numerable. Supongamos que $\sigma(T)$ no es finito y consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = \{\lambda \in \sigma(T) \colon |\lambda| > 1/n\}$. En tal caso, es evidente que

$$\sigma(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{0\}.$$

Ahora bien, como en virtud del Teorema 3.13 anterior, A_n es un conjunto finito para cada $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\sigma(T)$ es numerable.

Además, si denotamos los elementos no nulos del espectro de modo que

$$A_1 = \{\lambda_1, ..., \lambda_{k_1}\} \quad \text{y} \quad A_{n+1} \setminus A_n = \{\lambda_{k_n+1}, ..., \lambda_{k_{n+1}}\}, \quad \text{para cada } n \geq 1,$$

tenemos entonces que $\text{lím}_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Por otra parte, en virtud del Teorema 3.12, sabemos que los elementos no nulos del espectro de T son autovalores. Finalmente, basta recordar que el lema Lema 3.9 anterior afirma que el autoespacio $\text{Ker}(T - \lambda_i \, \text{Id}_X)$ tiene dimensión finita para cada $i \in \mathbb{N}$. $\square$

3.3. El Teorema de Lomonosov

En 1935, el matemático de origen húngaro J. von Neumann probó —aunque no publicó— que si X es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces T admite un subespacio invariante no trivial. Más tarde, en 1954, N. Aronszajn y K. T. Smith generalizaron dicho resultado para epacios de Banach (ver [9]). Sin embargo, no sería hasta mediados de los años 70 cuando V. Lomonosov logró demostrar (ver [15]), de forma relativamente sencilla, que todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(X)$ admite subespacios hiperinvariantes no triviales.

En realidad, V. Lomonosov obtuvo un resultado más fuerte y sorprendente: *todo operador no escalar que conmuta con un compacto no nulo admite un subespacio hiperinvariante*.

El objetivo de esta sección es presentar los diversos resultados sobre existencia de subespacios invariantes no triviales para operadores compactos; entre ellos el resultado de Lomonosov que acabamos de mencionar. Para ello, es necesario introducir inicialmente ciertos conceptos auxiliares directamente relacionados con el conmutador de un operador.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

Definición 3.15 (Álgebras de operadores)**.**
Se dice que:

(a) un subespacio vectorial $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ es un *álgebra de operadores* si $S, T \in \mathcal{A}$ implica que $ST \in \mathcal{A}$;

(b) un subespacio $V \subset X$ se dice $\mathcal{A}$-*invariante* si $T(V) \subset V$ para todo operador $T \in \mathcal{A}$.

Recordemos que una familia de funciones $\mathcal{F}$ de un espacio topológico (Ω, τ) en sí mismo se dice *transitiva* si para cada par $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$ y todo entorno V de ω_2, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(\omega_1) \in V$.

Por otra parte, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ es un álgebra de operadores, entonces es relativamente sencillo probar el siguiente resultado: si para cada par $(x, y) \in X \times X$ con $x \neq 0$ y todo $\epsilon > 0$, existe algún operador $A \in \mathcal{A}$ tal que $\|Ax - y\| < \epsilon$, entonces no existe un subespacio $\mathcal{A}$-invariante no trivial. Tal resultado justifica la última parte de la siguiente definición.

Definición 3.16. Un álgebra de operadores $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ se dice:

(a) *unitaria* si el operador identidad I está en $\mathcal{A}$;

(b) *cerrada* si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$;

(c) *transitiva* si no existen subespacios cerrados $\mathcal{A}$-invariantes no triviales;

(*d*) *no transitiva* si existe algún subespacio cerrado $\mathcal{A}$-invariante no trivial.

Dada un álgebra de operadores $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ y un vector $x \in X$, emplearemos la siguiente notación:

$$\mathcal{A}x = \{Sx : S \in \mathcal{A}\} \subset X.$$

Ejemplo 3.17 ($\{T\}'$ es una álgebra de operadores)**.**
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X)$, su conmutador $\{T\}' = \{S \in \mathcal{B}(X) : TS = ST\}$ es un álgebra de operadores.

Además, es importante observar que $V \subset X$ es T-hiperinvariante si y sólo si V es $\{T\}'$-invariante. Por tanto, T admite un subespacio hiperinvariante no trivial si y sólo si $\{T\}'$ es no transitiva.

3.3.1. El Teorema de Lomonosov I

Ya estamos en condiciones de probar un primer resultado que afirma la existencia de subespacios invariantes no triviales para operadores compactos.

Sea X un espacio de Banach (real o complejo) de dimensión infinita.

Teorema 3.18 (Lomonosov: subespacios invariantes & operadores compactos)**.**
Todo operador $T \in \mathcal{K}(X)$ no nulo admite un subespacio invariante no trivial.

Demostración.
Sea $T \in \mathcal{K}(X) - \{0\}$ arbitrario. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|T\| = 1$. En efecto, pues si T es un operador compacto no nulo de norma arbitraria, entonces $T/\|T\|$ es un operador compacto y de norma unidad; además, la condición "$Y \subset X$ subespacio invariante para T" equivale a "$Y \subset X$ subespacio invariante para $T/\|T\|$".

Como $\|T\| = 1$, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| > 1$ y $\|Tx_0\| > 1$. Sean ahora

$$U_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| < 1\} \subset X \qquad \text{y} \qquad B_0 = \overline{U_0}$$

En tal caso, por construcción, $0 \notin B_0$ y $0 \notin \overline{T(B_0)}$. Además, por ser T un operador compacto, $\overline{T(B_0)}$ es un conjunto compacto en X.

Ahora, distinguiremos dos casos:

Caso I: existe $z \in \overline{T(B_0)}$ tal que $Y = \{Sz \colon S \in \{T\}'\}$ satisface $Y \cap U_0 = \emptyset$.

Bajo tal condición, es inmediato comprobar que $\overline{Y}$ es un subespacio T-invariante cerrado y no trivial (pues $z \in \overline{Y} \neq \{0\}$ y $x_0 \notin \overline{Y}$).

Caso II: para cada $z \in \overline{T(B_0)}$ existe $S \in \{T\}'$ tal que $Sz \in U_0$.

Etapa I Bajo tal condición, los conjuntos abiertos

$$U_S = \{x \in X : \|Sx - x_0\| < 1\}, \quad \text{con } S \in \{T\}',$$

forman un recubrimiento por abiertos de $\overline{T(B_0)}$ y entonces, por la compacidad dicho conjunto, existe una familia finita de operadores $\{S_i \colon 1 \leq i \leq n\} \subset \{T\}'$ tal que

$$\overline{T(B_0)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{S_k}. \tag{3.8}$$

Etapa II Dado $1 \leq i \leq n$, consideramos la aplicación $f_i : X \longrightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ definida como

$$f_i(z) = \text{máx}\{0, 1 - \|S_i z - x_0\|\}, \quad \text{para cada } z \in X.$$

En tal caso, es evidente que $f_i(z) > 0$ si y sólo si $S_i z \in U_0$; luego

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z) > 0, \quad \text{para todo } z \in \overline{T(B_0)}.$$

Por tanto, para cada $1 \leq i \leq n$, la aplicación $g_i \colon \overline{T(B_0)} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$g_i(z) = \frac{f_i(z)}{f(z)}, \quad \text{para cada } z \in \overline{T(B_0)},$$

está bien definida y es positiva. Además, observemos que

$$g_1(Tx) + \cdots + g_n(Tx) = 1, \quad \text{para cada } x \in B_0. \tag{3.9}$$

Etapa III Consideremos ahora la aplicación $\Phi : B_0 \longrightarrow X$ definida por

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(Tx) S_i T x, \quad \text{para cada } x \in B_0$$

Dado $x \in B_0$, como $g_i(Tx) > 0$ equivale a que $S_i T x \in B_0$, la convexidad de B_0 y (3.9) nos permiten afirmar que $\Phi(B_0) \subset B_0$.

Es más, dado que $\Phi(x)$ es una combinación convexa de $S_i T x$ con $1 \leq i \leq n$, deducimos que

$$\Phi(x) \in C = \overline{\text{conv}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} S_i T(B_0)\right\}},$$

Dado que el conjunto $\cup_{i=1}^{m} S_i T(B_0)$ es totalmente acotado (pues T es compacto), por el Lema de Mazur (Teorema 1.30), C es un conjunto compacto y convexo.

Por tanto, $\Phi(B_0) \subset C \cap B_0$, siendo $C \cap B_0$ un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Por tanto, en virtud del Teorema de punto fijo de Tychonoff (Teorema 1.31), la aplicación $\Phi : C \cap B_0 \longrightarrow C \cap B_0$ admite un punto fijo u. En particular, como $u \in B_0$, debe ser $u \neq 0$.

Etapa IV Sea $L \in \{T\}'$ el operador definido como

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} g_i(Tu) S_i(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Etapa V Veamos que $\text{Ker}\,(\text{Id}_X - LT)$ es un subespacio (cerrado) no trivial y T-invariante. Para ello, comencemos observando que

$$LTu = \sum_{i=1}^{n} g_i(Tu) S_i(Tu) = \Phi(u) = u;$$

es decir, $u \in \text{Ker}\,(\text{Id}_X - LT)$, de donde concluimos que $\text{Ker}\,(\text{Id}_X - LT) \neq \{0\}$.

Además, dado que T es compacto, LT es compacto y por tanto $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_X - LT)$ tiene dimensión finita (basta aplicar el Lema 3.9); luego $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_X - LT)$ es un subespacio cerrado y no trivial.

Finalmente, teniendo en cuenta que $(\mathrm{Id}_X - LT) \in \{T\}'$ y que el núcleo de un operador es un subespacio hiperinvariante (ver Proposición 2.16), deducimos que $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_X - LT)$ es T-invariante. □

A continuación, probaremos el Teorema de Lomonosov que afirma la existencia de subespacios hiperinvariantes para operadores compactos. La demostración que indicaremos, debida a M. Hilden (ver [17, p. 158]), es una simplificación de las ideas originales de Lomonosov y puede consultarse en [7].

Teorema 3.19 (Lomonosov: subespacios hiperinvariantes & operadores compactos). *Todo operador $T \in \mathcal{K}(X)$ no nulo admite un subespacio hiperinvariante no trivial.*

Demostración.

Como en la prueba del Teorema 3.18 anterior, supongamos sin pérdida de generalidad alguna que $\|T\| = 1$.

Caso I: Supongamos que T es cuasi-nilpotente; esto es, que

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0.$$

Etapa I Sea $\mathcal{A} = \{T\}'$ el conmutador de T. Dado $x \in X$, consideremos el espacio vectorial $\mathcal{A}x = \{Sx : S \in \mathcal{A}\} \subset X$, que es —claramente— un subespacio (no necesariamente cerrado) T-hiperinvariante.

Probaremos que existe $x \in X$ tal que $\{0\} \neq \overline{\mathcal{A}x} \neq X$. Para ello, procederemos por reducción al absurdo; supongamos pues que

$$\overline{\mathcal{A}x} = X, \quad \text{para todo } x \in X \setminus \{0\}; \tag{3.10}$$

llegaremos a una contradicción.

Etapa II Como $\|T\| = 1$, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| > 1$ y $\|Tx_0\| > 1$. Sea ahora

$$B_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\} \subset X,$$

Como en el Teorema 3.18, $0 \notin B_0$ y $0 \notin \overline{T(B_0)}$. Además, en virtud de (3.10), para cada $x \neq 0$ existe un operador $S \in \mathcal{A}$ tal que $Sx \in B_0$.

Etapa III Así pues, los conjuntos abiertos

$$U_S = \{x \in X : \|Sx - x_0\| < 1\}, \quad \text{con } S \in \mathcal{A},$$

forman un recubrimiento de $X \setminus \{0\}$; luego también de $\overline{T(B_0)}$ y entonces, por la compacidad dicho conjunto (consecuencia de la compacidad de T), existe una familia finita de operadores $\{S_1, \ldots, S_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\overline{T(B_0)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{S_k}.$$

Etapa IV Como $Tx_0 \in T(B_0)$, existe $1 \leq j_1 \leq n$ tal que $Tx_0 \in U_{S_j}$. En tal caso, $x_1 = S_{j_1}Tx_0 \in B_0$ y entonces $Tx_1 \in T(B_0)$, por lo que existe $1 \leq j_2 \leq n$ tal que $x_2 = S_{j_2}Tx_1 \in B_0$. Procediendo entonces de manera inductiva, construimos una sucesión de índices $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \{1, ..., n\}$ tal que

$$x_k = S_{j_{k+1}}Tx_k \in B_0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Dado que cada operador S_j conmuta con T, tenemos que

$$\begin{aligned}\|x_k\| = \|S_{j_k}\cdots S_{j_1}T^k x_0\| &\leq \|S_{j_k}\|\cdots\|S_{j_1}\|\,\|T^k\|\,\|x_0\|\\ &\leq \Big(\max_{1\leq j\leq n}\|S_j\|\Big)^k\|T^k\|, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N};\end{aligned}$$

luego, en virtud de la cuasi-nilpotencia de T,

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{1/k} \leq \max_{1\leq j\leq n}\|S_j\| \lim_{k\to\infty}\|T^k\|^{1/k} = 0,$$

de donde deducimos que $x_k \to 0$, contradiciendo así la compacidad del conjunto B_0 (en efecto, pues $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_0$, pero $x_k \to 0 \notin B_0$).
En consecuencia, (3.10) es falso; esto es, existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que $\overline{\mathcal{A}x} \neq X$ y entonces, $\overline{\mathcal{A}x}$ es un subespacio T-hiperinvariante no trivial.

Caso II: Veamos ahora qué sucede si T no es cuasinilpotente ($\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n} > 0$).

Caso II.1 Si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, en virtud del Teorema 3.4 (Teorema de Gelfand) y el Teorema 3.12, sabemos que existe $0 \neq \lambda \in \sigma_P(T)$; luego N_λ es un subespacio cerrado T-hiperinvariante no trivial.

Caso II.2 Si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, sean $X_\mathbb{C}$ y $T_\mathbb{C}$ las complexificaciones de X y T respectivamente. En virtud de 1.23, tenemos que $T_\mathbb{C}$ es un operador compacto (por serlo T) y que

$$\lim_{n\to\infty}\|{T_\mathbb{C}}^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n} > 0.$$

Ahora, por el caso anterior, existe un autoespacio finito-dimensional (ver Lema 3.9) $N_\lambda \subset X_\mathbb{C}$ del operador $T_\mathbb{C}$; sea entonces $\{z_1, \ldots, z_k\}$ una base de N_λ, con $z_j = x_j + iy_j$ para cada $1 \leq j \leq k$ y consideremos el subespacio (cerrado, por ser de dimensión finita) dado por $\{0\} \neq V = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\} \neq X$. Veamos que V es T-hiperinvariante.
Sea $S \in \{T\}'$. En tal caso, es evidente que $S_\mathbb{C} \in \{T_\mathbb{C}\}'$ y entonces, como N_λ es $T_\mathbb{C}$-hiperinvariante, se sigue que $S_\mathbb{C}(N_\lambda) \subset N_\lambda$.
Para $1 \leq j \leq k$, se tiene que $Sx_j + iSy_j \in N_\lambda$; luego

$$Sx_j + i\,Sy_j = \sum_{n=1}^{k} a_n(x_n + iy_n), \quad \text{con } a_n \in \mathbb{C} \text{ para } 1 \leq n \leq k,$$

y entonces,

$$Sx_j = \sum_{n=1}^{k}\big(\operatorname{Re}(a_n)x_n - \operatorname{Im}(a_n)y_n\big) \in V$$

y

$$Sy_j = \sum_{n=1}^{k}\big(\operatorname{Im}(a_n)x_n + \operatorname{Re}(a_n)y_n\big) \in V.$$

Así pues, ahora es claro que $S(V) \subset V$. □

Corolario 3.20 (Subespacios invariantes & operadores que conmutan con un compacto).
Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador que conmuta con algún operador compacto no nulo, entonces T admite un subespacio invariante no trivial.

La hipótesis de dimensión infinita sobre el espacio de Banach X en el Teorema 3.19 resulta fundamental. En efecto, pues en dimensión finita, tal y como ya vimos en el Ejemplo 2.15 anterior, existen operadores (trivialmente compactos) sin subespacios hiperinvariantes.

Finalizamos este epígrafe con un resultado sobre operadores polinomialmente compactos.

Definición 3.21 (Operadores poilinomialmente compactos).
Un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ se dice *polinomialmente compacto* si existe un polinomio no nulo p tal que $p(T) \in \mathcal{K}(X)$.

Corolario 3.22 (Subespacios invariantes & operadores polinomilamente compactos).
Todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ no nulo y polinomialmente compacto admite un subespacio invariante no trivial.

Demostración.
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador polinomialmente compacto arbitrario y

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

un polinomio tal que $p(T) \in \mathcal{K}(X)$.

Si $p(T) \neq 0 \in \mathcal{B}(X)$, el Teorema 3.19 anterior asegura la existencia de un subespacio $p(T)$-hiperinvariante no trivial $V \subset X$. Por tanto, como T conmuta con $p(T)$, V es un subespacio cerrado T-invariante no trivial.

Si $p(T) = 0$, entonces

$$T^n = -\big(a_0 + a_1 T + \cdots + a_{n-1}T^{n-1}\big). \tag{3.11}$$

En tal caso, para $x \in X \setminus \{0\}$, el espacio vectorial $V = \operatorname{span}\{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\} \subset X$ es cerrado y cumple que $\{0\} \neq V \neq X$ —pues $x \neq 0$ y $\dim V \leq n$—. Además, teniendo en cuenta (3.11), deducimos inmediatamente que V es T-invariante. □

3.3.2. El Teorema de Lomonosov II

En este epígrafe, enunciaremos, probaremos y comentaremos la importancia del resultado de V. Lomonosov prometido en la página 12 (ver Teorema 3.25 siguiente). La demostración original puede consultarse en [15], aunque aquí se expone siguiendo la sección 10.2 de [1].

La demostración que indicaremos se basará en el siguiente resultado, cuya demostración es completamente análoga a la del Teorema 3.18 anterior. No obstante, por claridad en el discurso, preferimos escribirla con detalle.

Sea X un espacio de Banach (real o complejo).

Teorema 3.23.
Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ es un álgebra de operadores transitiva, entonces: para todo operador $K \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que AK tiene un punto fijo no nulo.

Demostración.

De nuevo, sin pérdida alguna de generalidad, podemos suponer que $\|K\| = 1$. Sean entonces: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X)$ un álgebra de operadores transitiva y $K \in \mathcal{K}(X)$ un operador de norma 1.

Como $\|K\| = 1$, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| > 1$ y $\|Kx_0\| > 1$. Sea ahora

$$B_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\} \subset X.$$

De nuevo, por construcción, $0 \notin B_0$ y $0 \notin \overline{K(B_0)}$. Además, en virtud de la transitividad de $\mathcal{A}$, se tiene que

$$\overline{\mathcal{A}x} = X, \quad \text{para todo } x \in X \setminus \{0\}. \tag{3.12}$$

En efecto, pues dado $x \in X \setminus \{0\}$, como $\mathcal{A}$ es un álgebra, el conjunto $\mathcal{A}x$ es $\mathcal{A}$-invariante; luego $\overline{\mathcal{A}x}$ también es $\mathcal{A}$-invariante (ver Lema 2.11). Además, $\overline{\mathcal{A}x} \neq \{0\}$, pues en otro caso el subespacio cerrado $\{\alpha x : \alpha \in \mathbb{K}\}$ sería $\mathcal{A}$-invariante, contradiciendo así de la transitividad de $\mathcal{A}$. En consecuencia, dado que $\overline{\mathcal{A}x}$ es un subespacio $\mathcal{A}$-invariante cerrado distinto de $\{0\}$, en virtud de la transitividad de $\mathcal{A}$, debe ser $\overline{\mathcal{A}x} = X$.

Procederemos por etapas y de modo muy similar a lo hecho en el Teorema 3.18 anterior.

Etapa I Así, en virtud de (3.12), para cada $x \neq 0$ existe un operador $A \in \mathcal{A}$ tal que $\|Ax - x_0\| < 1$. Por tanto, los conjuntos abiertos

$$U_A = \{y \in X : \|Ay - x_0\| < 1\}, \quad \text{con } A \in \mathcal{A},$$

forman un recubrimiento de $X \setminus \{0\}$; luego también de $\overline{K(B_0)}$ y entonces, por la compacidad de dicho conjunto (consecuencia de la compacidad de K), existe una familia finita de operadores $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\overline{K(B_0)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{A_k}. \tag{3.13}$$

Etapa II Dado $1 \leq i \leq n$, consideramos la aplicación $f_i : X \longrightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ definida como

$$f_i(z) = \max\{0, 1 - \|A_i z - x_0\|\}, \quad \text{para cada } z \in X.$$

En tal caso, es evidente que $f_i(z) > 0$ si y sólo si $\|A_i z - x_0\| < 1$ y así, a partir de (3.13), deducimos que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(z) > 0, \quad \text{para todo } z \in \overline{K(B_0)}.$$

Por tanto, para cada $1 \leq i \leq n$, la aplicación $g_i \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$g_i(z) = \frac{f_i(z)}{f(z)}, \quad \text{para cada } z \in \overline{K(B_0)},$$

está bien definida y es positiva y continua. Además, observemos que

$$g_1(Kx) + \cdots + g_n(Kx) = 1, \quad \text{para cada } x \in B_0. \tag{3.14}$$

Etapa III Consideremos ahora la aplicación $\Phi : B_0 \longrightarrow X$ definida por

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(Kx)A_iKx, \quad \text{para cada } x \in B_0 \tag{3.15}$$

Dado $x \in B_0$, como $g_i(Kx) > 0$ equivale a que $A_iKx \in \mathrm{Int}(B_0)$, la convexidad de B_0, la continuidad de Φ y (3.14) nos permiten afirmar que $\Phi(B_0) \subset B_0$.

Es más, dado que $\Phi(x)$ es una combinación convexa de A_iKx con $1 \leq i \leq n$, deducimos que

$$\Phi(x) \in C = \overline{\mathrm{conv}\left\{\bigcup_{i=1}^{m} A_iK(B_0)\right\}},$$

Dado que el conjunto $\cup_{i=1}^{m} A_iK(B_0)$ es totalmente acotado (pues K es compacto), por el Lema de Mazur (Teorema 1.30), C es un conjunto compacto y convexo.

Por tanto, $\Phi(B_0) \subset C \cap B_0$, siendo $C \cap B_0$ un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Por tanto, en virtud del Teorema de punto fijo de Tychonoff (Teorema 1.31), la aplicación $\Phi : C \cap B_0 \longrightarrow C \cap B_0$ admite un punto fijo u. En particular, como $u \in B_0$, debe ser $u \neq 0$.

Etapa IV Finalmente, considerando el operador

$$A = \sum_{i=1}^{m} g_i(Ku)A_i \in \mathcal{A}$$

y teniendo en cuenta (3.15), concluimos que

$$AKu = \sum_{i=1}^{m} g_i(Ku)A_iKu = \Phi(u) = u. \qquad \square$$

Empleando el Teorema 3.23 anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.24 (Corolario 3.20+δ).
Sea X un espacio de Banach complejo. En tal caso, si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador no escalar que conmuta con un operador compacto no nulo, entonces T admite un subespacio hiperinvariante no trivial.

Demostración.
Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ un operador no escalar y $K \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\}$ tal que $TK = KT$. Tenemos que probar que $\{T\}'$ es un álgebra no transitiva.

Procederemos por reducción al absurdo y supongamos entonces que $\{T\}'$ es transitiva; llegaremos a una contradicción.

Si $\{T\}'$ es transitiva, por el Teorema 3.23 anterior, existe $A \in \{T\}'$ tal que AK tiene un punto fijo no nulo. Sea entonces

$$\{0\} \neq F = \{x \in X : AKx = x\} \subset X,$$

que por continuidad de A y K, es un conjunto cerrado en X.

Por otra parte, como AK es un operador compacto y $AK_{|F} = \mathrm{Id}_F$, entonces se tiene que F es un subespacio de dimensión finita (en espacios de dimensión infinita la identidad nunca es compacta) y como T conmuta con AK, es inmediato ver que F es T-invariante.

Por tanto, podemos considerar el operador $T_{|F} : F \longrightarrow F$, que —en virtud del Teorema fundamental del álgebra (recordemos que F es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$)— tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea ahora, $N_\lambda = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{Id}_X)$. Entonces, por el Lema 2.29, N_λ es un subespacio T-hiperinvariante y no trivial (pues λ es autovalor y T no es escalar); hecho que contradice la transitividad de $\{T\}'$.

Luego $\{T\}'$ es no transitiva. □

Finalmente, ya podemos enunciar y probar el resultado que buscábamos.

Teorema 3.25 (Teorema del Subespacio Invariante de Lomonosov)**.**
Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$. En tal caso, si existe $S \in \mathcal{B}(X)$ satisfaciendo que:

(*a*) *S es no escalar,*

(*b*) *S conmuta con T,*

(*c*) *S conmuta con un operador compacto y no nulo;*

entonces T admite un subespacio T-invariante no trivial.

Demostración.
Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ un operador en las condiciones del enunciado. En tal caso, en virtud del Teorema 3.24 anterior, S admite un subespacio hiperinvariante no trivial V.

Por tanto, como T conmuta con S, el subespacio V también es T-invariante. □

Como veremos en el Capítulo 4, el Teorema 3.25 anterior no "puede ser mejorado" en el sentido de que no es posible extender la cadena de conmutaciones de modo que podamos seguir afirmando la existencia de subespacios invariantes no triviales.

Conviene también enfatizar que se trata de un resultado muy potente: basta que un operador conmute con otro no escalar que conmuta con un compacto no nulo para poder asegurar que tiene subespacios invariantes.

De hecho, durante algún tiempo, la búsqueda/inexistencia de operadores en $\mathcal{B}(X)$ ajenos a las hipótesis del Teorema 3.25 anterior mantuvo entretenidos a numerosos matemáticos. Observemos que la inexistencia de dichos operadores daría lugar a una respuesta positiva para el Problema del subespacio invariante. Sin embargo, a día de hoy, incluso son conocidos ejemplos de operadores definidos en espacios de Hilbert que no satisfacen las hipótesis del Teorema 3.25 (ver [13]).

Capítulo 4

Operadores sin subespacios invariantes

Tal y como ya comentamos en el Capítulo 2 anterior, el Problema del Subespacio invariante fue resuelto en 1981 por P. Enflo, quien construyó para ello un nuevo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ en el que definió un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ sin subespacios invariantes no triviales. Dicha construcción no es nada sencilla y, en su momento, no estuvo exenta de cierta controversia y discusión; buena prueba de ello es el largo periodo de tiempo que pasó desde que P. Enflo dió a conocer su solución hasta que ésta fue aceptada para su publicación formal en [11].

Sin embargo, años más tarde, el matemático inglés C. J. Read proporcionaría un ejemplo más natural y sencillo de operador sin subespacios invariantes no triviales en el espacio de sucesiones ℓ_1.

En la primera sección de este capítulo, estudiaremos y comentaremos con cierto detalle el ejemplo propuesto por C. J. Read en [6].

La segunda y última sección estará dedicada a comentar posibles extensiones y cuestiones avanzadas relacionadas con el Problema del subespacio invariante. Para un mayor detalle sobre los resultados más relevantes relacionados con el problema y su situación actual, puede consultarse [7].

4.1. El ejemplo de C. J. Read

La idea principal para construir un operador $T \in \mathcal{B}(\ell_1)$ sin subespacios invariantes no triviales consiste en construir una sucesión de vectores $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \ell_1$ adecuada y considerar luego el operador $T \in \mathcal{B}(\ell_1)$ que será la extensión continua a todo ℓ_1 de la aplicación definida como

$$Tf_i = f_{i+1}, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}_0.$$

Las propiedades específicas de la sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ provocarán que todo vector $x \in \ell_1 \setminus \{0\}$ sea T-cíclico y entonces, el operador T no admitirá ningún subespacio cerrado e invariante no trivial.

4.1.1. El ingrediente principal: una sucesión

Dedicaremos este epígrafe a indicar detalladamente cómo construir la sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ anteriormente mencionada.

Para ello, debemos comenzar introduciendo cierta notación.

(a) Sea ℓ_1 el espacio de sucesiones dado por

$$\ell_1 = \Big\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}\colon \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \Big\}.$$

En dicho espacio de Banach, consideraremos su base de Schauder canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ y el conjunto $\mathbb{C}^\infty = \operatorname{span}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}_0\}$, que es —en realidad— un subespacio vectorial denso en ℓ_1. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, emplearemos la notación $\mathbb{C}^n = \operatorname{span}\{e_i\colon 0 \le i \le n\}$.

(b) Sea $d = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

(c) Definimos además $a_0 = 1$, $v_0 = 0$ y $v_n = n(a_n + b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(d) Denotaremos por $|p|$ la suma del valor absoluto de los coeficientes de un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$.

Lema 4.1 (La sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$).
Si la sucesión d crece suficientemente rápido, existe una única sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^\infty$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(a) $e_0 = f_0$

(b) (b,1) *si n, i son enteros tales que $1 \le n$ e $i \in (v_{n-1}, a_n)$, entonces*

$$e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} f_i, \quad \text{con } h = a_n/2;$$

(b,2) *si r, n, i son enteros tales que $0 < r \le n$ e $i \in [0, v_{n-r}] + ra_n$, entonces*

$$e_i = a_{n-r}(f_i - f_{i-ra_n});$$

(b,3) *si r, n, i son enteros tales que $1 \le r < n$ e $i \in (ra_n + v_{n-r}, (r+1)a_n)$, entonces*

$$e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} f_i, \quad \text{con } h = (r + 1/2)a_n;$$

(b,4) *si r, n, i son enteros tales que $0 \le r < n$, $i \in (na_n + rb_n, (r+1)(a_n + b_n))$, entonces*

$$e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} f_i, \quad \text{con } h = (r + 1/2)b_n.$$

(b,5) *si r, n, i son enteros tales que $1 \le r \le n$, $i \in [r(a_n + b_n), na_n + rb_n]$, entonces*

$$e_i = f_i - b_n f_{i-b_n};$$

Demostración.
Si la sucesión d crece suficientemente rápido, las condiciones (a) − (b) anteriores proporcionan, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, una única ecuación de la forma

$$e_i = \sum_{j=0}^{i} \lambda_{i,j} f_j, \quad \text{con } \lambda_{i,i} \neq 0 \ \text{ para todo } \ i \in \mathbb{N}_0.$$

Por tanto, dicha relación es invertible —observemos que la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales correspondiente es triangular inferior y con diagonal no nula—, garantizando así la unicidad de la sucesión $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$. □

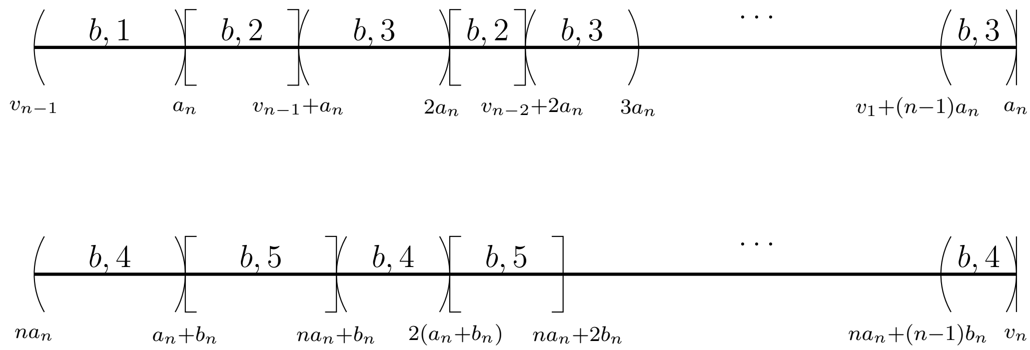

Figura 4.1: Partición inducida en $\mathbb{R}^+$ por las condiciones $(b,1)-(b,5)$.

Nota 4.2. Observemos además que

$$\operatorname{span}\{f_i\colon 0 \le i \le n\} = \operatorname{span}\{e_i\colon 0 \le i \le n\} = \mathbb{C}^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Si $x = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n \in \operatorname{span}\{f_i\colon 0 \le i \le n\}$, emplearemos la notación

$$|x| = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|.$$

Definición 4.3 (El isomorfismo $J_n\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$)**.**
Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $J_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ el isomorfismo dado por

$$J_n(f_i) = e_i, \quad \text{para cada } 0 \le i \le n. \tag{4.1}$$

Nota 4.4 (Sobre el isomorfismo $J_n\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$)**.**
Conviene observar que:

(*a*) si $n = ma_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el isomorfismo J_n depende solamente de: el propio $m \in \mathbb{N}$, a_i con $1 \le i \le m$ y b_i con $1 \le i \le m$;

(*b*) si $n = v_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el isomorfismo J_n depende solamente de: el propio $m \in \mathbb{N}$, a_i con $1 \le i \le m$ y b_i con $1 \le i \le m-1$.

Por tanto, teniendo en cuenta la monotonía estricta de la sucesión d, existen funciones $F_1, F_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ de modo que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\|J_{ma_m}\|, \|{J_{ma_m}}^{-1}\|\} \le F_1(m, a_m) \quad \text{y} \quad \max\{\|J_{v_m}\|, \|{J_{v_m}}^{-1}\|\} \le F_2(m, b_m). \tag{4.2}$$

Como consecuencia interesante de lo anterior, observemos que si $x \in \mathbb{C}^{ma_m}$, entonces $|x| = \|J_{ma_m}x\| \le F_1(m, a_m)\,\|x\|$. Además, por simetría, también se tiene que $\|x\| \le F_1(m, a_m)|x|$. Esto supone una importante relación entre $|\cdot|$ y la norma $\|\cdot\|$ (se satisface análogamente en $\mathbb{C}^{v_m}$ con $F_2(m, b_m)$).

Definición 4.5 (Tres proyecciones)**.**

(*a*) Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos las proyecciones Q_m, $Q_m^0 : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^{ma_m}$ como:

$$Q_m(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \le j \le ma_m, \\ e_{j-ra_n+(r-n+m)a_m}, & j \in [0, v_{n-r}] + ra_n,\ 0 < n-m < r \le n, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

$$Q_m^0(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \le j \le m a_m, \\ -a_{n-r} f_{j-ra_n}, & j \in [0, v_{n-r}] + r a_n,\ 0 < n-m < r \le n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(*b*) Para $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n \geq 1$, definimos el operador $P_{n,m} = \tau_{n,m} Q_m$, donde $\tau_{n,m} : \mathbb{C}^{ma_m} \longrightarrow \mathbb{C}^{ma_m}$ es la proyección dada por

$$\tau_{n,m}(f_j) = \begin{cases} f_j, & 0 \le j \le (m-n)a_m, \\ 0, & (m-n)a_m \le j \le m a_m. \end{cases}$$

Definición 4.6 (El operador T)**.**
Sea $T : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ el operador dado por

$$T f_i = f_{i+1}, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}_0.$$

A continuación, presentamos algunos resultados cuya demostración es relativamente sencilla y que serán útiles más adelante.

Lema 4.7 (Auxiliar para el Lema 4.8 y el Lema 4.10)**.**
Dado un operador $S \in \mathcal{B}(\ell_1)$, se tiene que

$$\|S\| = \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \|Se_i\|.$$

Demostración.
Para toda sucesión $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \ell_1$ se tiene que

$$\|Sx\| = \Big\| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i S e_i \Big\| \le \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| \|Se_i\| \le \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \|Se_j\| \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \|Se_j\| \, \|x\|;$$

luego es claro que $\|S\| \le \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \|Se_i\|$. Además, teniendo en cuenta que $\|Se_i\| \le \|S\|$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$, concluimos que $\sup_{i \in \mathbb{N}_0} \|Se_i\| \le \|S\|$. □

Lema 4.8 (Auxiliar para el Lema 4.19)**.**

$$\|Q_m\| = 1, \quad \textit{para todo } m \in \mathbb{N}_0$$

Demostración.
Teniendo en cuenta el Lema 4.7, basta observar que $\|Q_m(e_i)\| \in \{0, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$ y que $Q_m \neq 0 \in \mathcal{B}(\ell_1)$. □

Lema 4.9 (Auxiliar para el Teorema 4.18)**.**
Si d crece suficientemente rápido, $\|Q_m^0\| \le a_{m-1} F_2(m-1, b_{m-1}) \le a_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demostración.
Teniendo en cuenta la Definición 4.5 anterior, observamos que $\|Q_m^0(e_j)\| \in \{0, 1\}$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ excepto cuando $j \in [0, v_{n-r}] + r a_n$ para $0 < n - m < r \le n$, caso en el que

$$\begin{aligned} \|Q_m^0(e_j)\| &= a_{n-r} \|f_{j-ra_n}\| \le a_{m-1} \|f_{j-ra_n}\| \\ &= a_{m-1} \|{J_{v_{m-1}}}^{-1}(e_{j-ra_n})\| \le a_{m-1} F_2(m-1, b_{m-1}), \end{aligned}$$

donde hemos empleado la monotonía de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, la identidad (4.1) y la segunda desigualdad de (4.2). Por último, si d crece suficientemente rápido, está claro que

$$a_{m-1} F_2(m-1, b_{m-1}) \le a_m. \qquad \square$$

Lema 4.10 (Auxiliar para el Lema 4.19).
Si d crece suficientemente rápido, $\|P_{n,m}\| \leq a_n F_2(n, b_n) \leq a_{n+1}$ para todo $n < m$.

Demostración.
Dado que $\|Q_m\| = 1$, $\|P_{n,m}\| \leq \|\tau_{n,m}\|$. Por otro lado, para $j \leq ma_m$, tenemos $P_{n,m}e_j = \tau_{n,m}e_j$. Entonces, en virtud del Lema 4.7 anterior,

$$\|P_{n,m}\| \geq \sup_{j \leq ma_m} \|P_{n,m}e_j\| = \sup_{j \leq ma_m} \|\tau_{n,m}e_j\| = \|\tau_{n,m}\|.$$

Por tanto, debe ser $\|P_{n,m}\| = \|\tau_{n,m}\|$. Además, teniendo en cuenta la Definición 4.5 (b),

$$\tau_{n,m}(e_j) = \begin{cases} -a_{m-r} f_{j-ra_m}, & j \in [0, v_{m-r}] + ra_m,\ m-n \leq r \leq m, \\ \\ e_j \text{ o cero}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.3}$$

En consecuencia,

$$\|\tau_{m,n}\| \leq \sup_{j \in [0,v_n]+ra_m,\, r=[m-n,m]} a_{m-r}\|f_{j-ra_m}\| \leq a_n \sup_{i \in [0,v_n]} \|f_i\| \leq a_n F_2(n, b_n).$$

Finalmente, si d crece suficientemente rápido,

$$a_n F_2(n, b_n) \leq a_{n+1}.$$ □

El siguiente lema será clave para la prueba de que la extensión del operador T introducido en la Definición 4.6 anterior no admite subespacios invariantes no triviales. Su demostración (en este caso, nada sencilla) hace uso de todos los casos presentados en el enunciado del Lema 4.1 y puede encontrarse en [6, p. 337].

Lema 4.11.
Sea $\eta > 0$ dado. Si d es una sucesión que crece suficientemente rápido, entonces:

$$\|T\| < 1 + \eta \quad y \quad \|T^{a_n+b_n}(I - Q_n^0)\| < 1 + \eta, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Nota 4.12 (Extensión del operador T a todo ℓ_1).
En virtud del Lema 4.11 anterior, $\|T\| < 1+\eta$. Por tanto, es posible extender de forma continua el operador T a todo el espacio ℓ_1; basta definir $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ como

$$T\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T e_i, \quad \text{para cada } \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i \in \ell_1.$$

Así, T está bien definido y es acotado. En efecto, pues

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i \in \ell_1 \iff \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$$

y en consecuencia,

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\,\|Te_i\| \leq \|x\|(1+\eta).$$

4.1.2. Un operador sin subespacios invariantes

Ahora ya podemos iniciar el razonamiento que nos permitirá concluir que el operador $T\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ que acabamos de mencionar no admite subespacios invariantes no triviales.

Proposición 4.13.
Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ y $x \in X$. En tal caso, si x_0 es un vector T-cíclico y para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $\|p(T)x - x_0\| < \varepsilon$, entonces x es cíclico.

Demostración.
Dado $y \in X$ arbitrario, probaremos que $y \in \overline{\mathcal{O}_T(x)}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. En tal caso, como x_0 es un vector T-cíclico, existe un polinomio q tal que $\|q(T)x_0 - y\| < \varepsilon/2$. Por otra parte, por hipótesis, sabemos que existe un polinomio p tal que $\|p(T)x - x_0\| < \varepsilon/(2\|q(T)\|)$. Así pues, dado que $q(T)p(T)x \in \mathcal{O}_T(x)$ y

$$\begin{aligned}\|y - q(T)p(T)x\| &\leq \|y - q(T)x_0\| + \|q(T)x_0 - q(T)p(T)x\| \\ &< \varepsilon/2 + \|q(T)\|\,\|x_0 - p(T)x\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

deducimos finalmente que $y \in \overline{\mathcal{O}_T(x)}$. □

Como ya dijimos, la clave para demostrar que la extensión de T no admite subespacios invariantes no triviales será probar que cualquier vector no nulo $x \in \ell_1$ es T-cíclico. Es decir, queremos ver que $\overline{\mathcal{O}_T(x)} = \ell_1$ para cada $x \in \ell_1 \setminus \{0\}$.

Está claro que f_0 es un vector T-cíclico; en efecto, pues $\{T^r f_0\colon 0 \leq r \leq n\} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ y así $\mathcal{O}_T(f_0) = \operatorname{span}\{f_i\colon i \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{C}^\infty$, con $\overline{\mathbb{C}^\infty} = \ell_1$.

En consecuencia, teniendo en cuenta la Proposición 4.13 que acabamos de probar, basta ver que para cualquier $x \in X$, existe un polinomio p tal que $\|p(T)x - f_0\|$ es arbitrariamente pequeño. Es decir, basta demostrar que f_0 es "polinomialmente aproximable mediante T" por cualquier vector no nulo de ℓ_1.

A continuación, presentaremos varias construcciones y resultados que nos dan polinomios adecuados para aproximar ciertos vectores. El objetivo final es usar la desigualdad triangular para finalmente obtener una cota del estilo $\|p(T)x - f_0\| < \varepsilon$.

Definición 4.14 (El conjunto $K_{n,m}$)**.**
Para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$, definimos

$$K_{n,m} = \big\{x \in \mathbb{C}^{ma_m} \colon \|x\| \leq a_m,\ \|\tau_{n,m}(x)\| \geq 1/a_m\big\}.$$

Conviene observar que el conjunto $K_{n,m} \subset \mathbb{C}^{ma_m}$ es cerrado y acotado; luego $K_{n,m}$ es un conjunto compacto. Además, la definición de $K_{n,m}$ solo depende de la elección de $n, m \in \mathbb{N}$, a_i con $1 \leq i \leq m$ y b_i con $1 \leq i \leq m - 1$.

Lema 4.15 (Auxiliar para el Lema 4.16)**.**
Existe una función $N_1 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: si d es una sucesión que crece suficientemente rápido, para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y $x \in K_{n,m}$, existe un polinomio p tal que

$$|p| < N_1(m, a_m), \quad p(t) = \sum_{j=a_m}^{ma_m} \lambda_j t^j \quad y \quad \|p(T)x - f_0\| \leq \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{n-1}}. \tag{4.4}$$

Demostración.

Sea $T_m\colon \mathbb{C}^{ma_m} \longrightarrow \mathbb{C}^{ma_m}$ la versión truncada de T; esto es

$$T_m f_i = f_{i+1} \quad \text{si } i < ma_m \qquad \text{y} \qquad T_m f_i = 0 \quad \text{si } i = ma_m.$$

Dado $x \in K_{n,m}$ tal que

$$x = \sum_{i=\alpha}^{ma_m} \lambda_i f_i, \quad \text{con } \lambda_\alpha \neq 0,$$

como $\tau_{n,m}(x) \neq 0$ —pues $\|\tau_{n,m}\| \geq 1/a_m$—, deducimos entonces que $\alpha < (m-n)a_m$. Por tanto,

$$f_{(m-n+1)a_m} \in \operatorname{span}\left\{f_{\alpha+a_m}, f_{\alpha+a_m+a}, \ldots, f_{ma_m}\right\} = \operatorname{span}\left\{{T_m}^k x\colon a_m \leq k \leq ma_m\right\}.$$

Es decir, para cada $x \in K_{n,m}$, existe un polinomio p_x tal que $p_x(T_m)x = f_{(m-n+1)a_m}$.

Consideremos ahora el recubrimiento abierto de $K_{n,m}$ dado por

$$\bigcup_{x \in K_{n,m}} \left\{ y \in K_{n,m}\colon \|p_x(T_m)y - f_{(m-n+1)a_m}\| < \frac{1}{a_m} \right\}.$$

No obstante, como $K_{n,m}$ es un conjunto compacto, existe entonces una familia finita de polinomios $\{p_j\colon 1 \leq j \leq k\}$ con

$$p_j(t) = \sum_{i=a_m}^{ma_m} \lambda_{i,j} t^i, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq k,$$

de modo que para cada $x \in K_{n,m}$ existe $1 \leq j \leq k$ tal que

$$\|p_j(T_m)x - f_{(m-n+1)a_m}\| < \frac{1}{a_m}.$$

Además, como todo lo anterior depende únicamente de las elecciones de $n, m \in \mathbb{N}$, a_i con $1 \leq i \leq m$ y b_i con $1 \leq i \leq m-1$, existe $N_1 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\max_{1 \leq j \leq k} |p_j| \leq N_1(m, a_m)$.

Por otra parte, tomando $r' = m-n+1$, $n' = m$ e $i = (m-n+1)a_m$ en el primer caso de la Definición 4.1 anterior, deducimos que $\|f_{(m-n+1)a_m} - f_0\| = 1/a_{n-1}$; luego

$$\|p(T)x - f_0\| \leq \|p(T)x - f_{(m-n+1)a_m}\| + \|f_{(m-n+1)a_m} - f_0\| = \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{n-1}}. \qquad \square$$

Lema 4.16 (Auxiliar para el teorema 4.18)**.**
Si d es una sucesión que crece suficientemente rápido, para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y $x \in K_{n,m}$, existe un polinomio q tal que

$$t^{a_m+b_m} | q, \quad \deg q \leq b_m + ma_m, \quad |q| \leq \frac{N_1(m, a_m)}{b_m}, \quad \|q(T)x - f_0\| \leq \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{3}{a_m}. \tag{4.5}$$

Demostración.

Con la notación del Lema 4.15 anterior, dado un polinomio p satisfaciendo (4.4), consideremos ahora $q(t) = t^{b_m} p(t)/b_m$. Para $i \in [a_m + b_m, ma_m + b_m]$ tenemos que

$$e_i = f_i - b_m f_{i-b_m} \tag{4.6}$$

y así, poniendo

$$p(T_m)x = \sum_{j=a_m}^{ma_m} \lambda_j f_j, \tag{4.7}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\Big\| \frac{T^{b_m}}{b_m} p(T_m)x - p(T_m)x \Big\| &= \Big\| \sum_{j=a_m}^{ma_m} \lambda_j \Big(\frac{f_{j+b_m}}{b_m} - f_j \Big) \Big\| = \Big\| \sum_{j=a_m}^{ma_m} \frac{\lambda_j}{b_m} e_j \Big\| \\
&= \frac{1}{b_m} \sum_{j=a_m}^{ma_m} |\lambda_j| = \frac{1}{b_m} |p(T_m)x| \leq \frac{1}{b_m} |p|\,|x| \\
&\leq \frac{1}{b_m} |p| F_1(m,a_m) \|x\| \leq \frac{1}{b_m} N_1(m,a_m) F_1(m,a_m) a_m \\
&\leq \frac{1}{a_m}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En efecto, para las igualdades basta tener en cuenta (4.6) y las definiciones de $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$. La primera desigualdad se obtiene como sigue: si ponemos $p(t) = \sum_{i=a_m}^{ma_m} c_i t^i$ y $x = \sum_{i=0}^{ma_m} \mu_i f_i$ (pues $x \in K_{n,m}$), por la definición de T_m se deduce que

$$p(T_m)x = \sum_{j=a_m}^{ma_m} \sum_{i=0}^{ma_m} c_j \mu_i T_m^j f_i = \sum_{j=a_m}^{ma_m} \sum_{i=0}^{ma_m - j} c_j \mu_i f_{i+j}.$$

Por tanto,

$$|p(T_m)x| = \sum_{j=a_m}^{ma_m} \sum_{i=0}^{ma_m - j} |c_j \mu_i| \leq \sum_{j=a_m}^{ma_m} |c_j| \sum_{i=a_m}^{ma_m - j} |\mu_i| \leq |p|\,|x|.$$

En las tres últimas desigualdades de (4.8) se emplean, respectivamente:

1.– la relación entre $\|x\|$ y $|x|$ que proporciona la Nota 4.4,

2.– la acotación de $|p|$ obtenida en el Lema 4.15 y que $x \in K_{m,m}$,

3.– el hecho de que d crece suficientemente rápido.

Por otra parte,

$$T^{b_m}(p(T) - p(T_m))x \in T^{b_m}\big(\operatorname{span}\{f_j \colon ma_m < j \leq 2ma_m\}\big),$$

es decir

$$T^{b_m}(p(T) - p(T_m))x \in \operatorname{span}\{f_j \colon b_m + ma_m < j \leq b_m + 2ma_m\}.$$

y dado que se tiene $(b_m + ma_m, b_m + 2ma_m] \subset (b_m + ma_m, 2(a_m + b_m))$, por la propiedad $(b,4)$ enunciada en el Lema 4.1, deducimos que si d crece suficientemente rápido, entonces

$$\|f_j\| = 2^{(j - 3b_m/2)/\sqrt{b_m}} < 2^{-\sqrt{b_m}/3}, \quad \text{para todo } j \in (b_m + ma_m, b_m + 2ma_m].$$

En consecuencia, siempre y cuando d crezca suficientemente rápido,

$$\Big\| \frac{T^{b_m}(p(T) - p(T_m))}{b_m} x \Big\| \leq \frac{|p|\,|x|}{b_m} \sup\{\|f_j\| \colon b_m + ma_m < j \leq b_m + 2ma_m\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{|p|\,|x|}{b_m}\,2^{-\sqrt{b_m}/3} \leq \frac{2^{-\sqrt{b_m}/3}}{b_m} N_1(ma_m)F_1(m,a_m)\|x\| \\
&< 1/a_m. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Justifiquemos la primera de las desigualdades anteriores (las demás son análogas a las de la ecuación (4.8)). Con la notación anterior, para p y x, tenemos que

$$
(p(T)-p(T_m))x = \sum_{j=a_m}^{ma_m}\sum_{i=0}^{ma_m} c_j\mu_i(T^j - T_m^j)f_i = \sum_{j=a_m}^{ma_m}\sum_{i=ma_m+1-j}^{ma_m} c_j\mu_i f_{i+j}
$$

pues los sumandos con $i+j \leq ma_m$ son nulos. Ahora, haciendo actuar el operador T^{b_m}, los subíndices de f se trasladan por b_m y entonces

$$
\|T^{b_m}(p(T)-p(T_m))x\| \leq \sum_{j=a_m}^{ma_m}\sum_{i=ma_m+1-j}^{ma_m} |c_j|\,|\mu_i| \sup\big\{\|f_k\| \colon b_m+ma_m < k \leq b_m+2ma_m\big\},
$$

de donde se sigue inmediatamente la primera desigualdad.

Así pues, empleando el Lema 4.15 anterior, (4.8) y (4.9), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|q(T)x - f_0\| &\leq \|p(T_m)x - f_0\| + \left\|\frac{T^{b_m}}{b_m}p(T_m)x - p(T_m)x\right\| + \left\|\frac{T^{b_m}(p(T)-p(T_m))}{b_m}x\right\| \\
&\leq \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{3}{a_m}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, las condiciones $t^{a_m+b_m}|q$ y $\deg q \leq b_m + ma_m$ son consecuencia de la definición de q si tenemos en cuenta la expresión de p. Por último, $|q| = |p|/b_m \leq N_1(m,a_m)/b_m$. $\square$

Nota 4.17.

Observemos que el polinomio q del Lema 4.16 anterior satisface que

$$
\begin{aligned}
\|q(T)(I-Q_m^0)\| &= \left\|\left(\frac{q}{t^{a_m+b_m}}\right)(T)\,T^{a_m+b_m}(I-Q_m^0)\right\| \\
&\leq |q|\,\|T\|^{\deg q - a_m - b_m}\,\|T^{a_m+b_m}(I-Q_m^0)\| \\
&\leq |q|\,\|T\|^{(m-1)a_m}\,\|T^{a_m+b_m}(I-Q_m^0)\| \leq |q|\,2^{(m-1)a_m+1},
\end{aligned}
$$

pues $\|T\|$ y $\|T^{a_m+b_m}(I-Q_m^0)\|$ son menores que 2 en virtud del Lema 4.11.

Por tanto, teniendo en cuenta (4.5), obtenemos que

$$
\|q(T)(I-Q_m^0)\| \leq \frac{N_1(m,a_m)}{b_m}2^{(m-1)a_m+1}. \qquad (4.10)
$$

Teorema 4.18 (¡El operador $T\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ no tiene subespacios invariantes!)**.**
Si d es una sucesión que crece suficientemente rápido, la extensión continua de T no tiene subespacios invariantes cerrados y no triviales.

Demostración.

En virtud de la Proposición 2.12 anterior, para probar el resultado enunciado basta ver que todo vector no nulo de ℓ_1 es cíclico.

Teniendo en cuenta la Proposición 4.13 anterior y que $f_0 \in \ell_1$ es un vector T-cíclico, concluimos entonces que es suficiente probar que para cada $x \in \ell_1$ con $\|x\| = 1$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio q tal que $\|q(T)x - f_0\| < 2/a_{n-1}$.

Sea entonces $x \in \ell_1$ con $\|x\| = 1$ escogido de forma arbitraria. En primer lugar, se puede comprobar que existe $m \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tal que

$$\|\tau_{n,m} Q_m^0 x\| \geq \frac{1}{a_m}. \tag{4.11}$$

Por claridad en la exposición, probaremos dicho resultado en el siguiente Lema 4.19.

Sea ahora $y = Q_m^0 x$. En tal caso, teniendo en cuenta (4.11) y el Lema 4.9 anterior,

$$\|\tau_{n,m} y\| = \|\tau_{n,m} Q_m^0 x\| \geq \frac{1}{a_m} \quad \text{y} \quad \|y\| \leq \|Q_m^0\| \|x\| \leq a_{m-1} F_2(m-1, b_{m-1}) \leq a_m;$$

esto es, $y \in K_{n,m}$. Por tanto, en virtud del Lema 4.16, existe un polinomio q tal que

$$\|q(T)y - f_0\| \leq \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{3}{a_m}. \tag{4.12}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (4.12) y (4.10), deducimos que si d crece suficientemente rápido, entonces

$$\begin{aligned} \|q(T)x - f_0\| &\leq \|q(T)y - f_0\| + \|q(T)(y - x)\| = \|q(T)y - f_0\| + \|q(T)(Q_m^0 - I)x\| \\ &\leq \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{3}{a_m} + \frac{N_1(m, a_m) 2^{(m-1)a_m + 1}}{b_m} < \frac{2}{a_{n-1}}; \end{aligned}$$

obteniéndose así la desigualdad buscada, que nos permite afirmar ahora que todo vector no nulo de ℓ_1 es cíclico. Luego T no admite ningún subespacio cerrado e invariante no trivial. □

Resta entonces únicamente demostrar el siguiente lema.

Lema 4.19. *Dados $x \in \ell_1$ con $\|x\| = 1$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ tal que*

$$\|\tau_{n,m} Q_m^0 x\| \geq \frac{1}{a_m}$$

Demostración.

Inicialmente, recordemos que $P_{n,m} = \tau_{n,m} Q_m$. En virtud del Lema 4.10, se tiene que $\|P_{n,k}\| \leq a_{n+1}$ para todo $k > n$.

Además, para cada $z \in \mathbb{C}^\infty$, $P_{n,k}(z) = z$ para todo $k \in \mathbb{N}$ excepto una cantidad finita. En efecto, dado $z = (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty$, si consideramos los índices k tales que $(k-n)a_k \geq r$, se tiene que $Q_k(z) = \sum_{i=1}^r z_i Q_k e_i$, y como $i \leq r \leq k a_k$, de la definición de Q_k se deduce que $Q_k z = z$. Por otra parte, expresando $z = \sum_{i=1}^r \beta_i f_i$ (recordemos que los conjuntos $\{e_i : 0 \leq i \leq r\}$ y $\{f_i : 0 \leq i \leq r\}$ generan el mismo espacio), un razonamiento análogo conduce a que $\tau_{n,k} z = z$, por lo que $P_{n,k} z = \tau_{n,m} Q_m z = z$.

Por tanto,

$$\lim_{k \to \infty} P_{n,k} x = x.$$

Sea $k > n$ suficientemente grande tal que

$$\|P_{n,k} x\| = \|\tau_{n,k} Q_k x\| > \frac{1}{2}$$

Consideraremos dos casos:

(a) Si se cumple que

$$\|\tau_{n,k}Q_k^0x\| > \frac{1}{4},$$

entonces, para d creciendo suficientemente rápido tendremos que

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{a_k},$$

y se tiene el resultado.

(b) En otro caso, esto es, si

$$\|\tau_{n,k}Q_k^0x\| \leq \frac{1}{4}, \tag{4.13}$$

entonces

$$\|\tau_{n,k}(Q_k^0 - Q_k)x\| \geq \|\tau_{n,k}Q_kx\| - \|\tau_{n,k}Q_k^0x\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \tag{4.14}$$

Así, en virtud del Lema 4.1 y la Definición 4.5, para todo $j \geq 0$, tenemos que

$$(Q_k - Q_k^0)e_j = \\ = \begin{cases} a_{m-r}f_{j-ra_m+(r-mk+)a_k}, & j \in [0, v_{m-r}] + ra_m,\ 0 < m-k < r \leq m \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.15}$$

Luego,

$$\tau_{n,k}(Q_k - Q_k^0)e_j = \\ = \begin{cases} a_{m-r}f_{j-ra_m+(r-mk+)a_k}, & j \in [0, v_{m-r}] + ra_m,\ 0 < m-k < r < m-n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue entonces que

$$\tau_{n,k}(Q_k - Q_k^0) = \tau_{n,k}(Q_k - Q_k^0)\pi_S, \tag{4.16}$$

siendo π_S es la proyección de ℓ_1 sobre $\overline{\text{span}}\{e_i \colon i \in S\}$ y

$$S = \bigcup_{m>k} \bigcup_{r\in(m-k,m-n)} ([0, v_{m-r}] + ra_m) = \bigcup_{m>k} S_m.$$

Dado que $\|x\| = 1$, de las ecuaciones (4.14) y (4.16), deducimos que

$$\|\pi_S\, x\| > \frac{1}{4}\, \frac{1}{\|\tau_{n,k}\|\, \|Q_k - Q_k^0\|} \geq \frac{1}{4a_{n+1}(1 + a_k)}, \tag{4.17}$$

donde para obtener la última desigualdad hemos empleado los Lemas 4.8, 4.9 y 4.10. Ahora bien, la desigualdad (4.17) implica que

$$\|\pi_{S_m}\, x\| > \frac{2^{k-m}}{4a_{n+1}(1 + a_k)}, \quad \text{para cierto } m > k.$$

En efecto, pues en otro caso tendríamos que

$$\|\pi_S\, x\| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \|\pi_{S_m}\, x\| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2^{k-m}}{4a_{n+1}(a+a_k)} = \frac{1}{4a_{n+1}(1+a_k)},$$

desigualdad que contradice a (4.17).

Por otro lado, es sencillo ver que (para d creciendo suficientemente rápido) si $j \in S_m$, entonces $\tau_{n,m} Q_m^0 e_j = \tau_{n,m} e_j = e_j$. En efecto, pues $j \in S_m$ implica que

$$j \leq v_n + (m-n)a_m = n(a_n + b_n) + (m-n)a_m \leq na_m + (m-n)a_m = ma_m$$

y entonces $Q_m^0 e_j = e_j$.

Además, para todo $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $Q_m^0 e_j$ es e_j o bien un elemento de $\mathbb{C}^{v_{m-1}}$. Por tanto, recordando la construcción de $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ y la definición del operador $\tau_{n,m}$, se sigue que $\tau_{n,m} Q_m^0 e_j$ también es e_j o bien un elemento de $\mathbb{C}^{v_{m-1}}$. Además, si d crece suficientemente rápido, el menor elemento de S_m es $(m-k+1)a_m \geq v_{m-1}$; luego $\pi_{S_m}(\tau_{n,m} Q_m^0 e_j) = 0$.

Así pues,

$$\pi_{S_m} = \pi_{S_m} \tau_{n,m} Q_m^0,$$

y en consecuencia, dado que $\|\pi_{S_m}\| = 1$,

$$\|\tau_{n,m} Q_m^0 x\| \geq \|\pi_{S_m} \tau_{n,m} Q_m^0 x\| = \|\pi_{S_m} x\| > \frac{2^{k-m}}{4a_{n+1}(1+a_k)}. \tag{4.18}$$

Finalmente, si d crece suficientemente rápido, el término de la derecha es mayor que $1/a_m$ y se tiene entonces el resultado enunciado (nótese que $m > k > n$). □

4.2. Algunos comentarios

Para finalizar este trabajo, comentamos la posibilidad de una interesante extensión del Teorema de Lomonosov, así como una visión general del Problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert —en los que, recordemos, sigue abierto.

4.2.1. Extensión del Teorema de Lomonosov

Este epígrafe seguiremos, principalmente, el desarrollo presentado en el artículo [8] de Vladimir G. Troitsky, en el que se muestra, con un ejemplo, que la cadena de conmutaciones del Teorema de Lomonosov (Teorema 3.25) no puede aumentarse.

Recordemos los enunciados de tres versiones del teorema de Lomonosov que hemos presentado

Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador compacto no nulo, entonces T admite un subespacio invariante no trivial.*

Teorema. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador que conmuta con algún operador compacto no nulo, entonces T admite un subespacio invariante no trivial.*

Teorema. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$. En tal caso, si existe $S \in \mathcal{B}(X)$ satisfaciendo que:*

(*a*) *S es no escalar,*

(*b*) *S conmuta con T,*

(*c*) *S conmuta con un operador compacto y no nulo;*

entonces T admite un subespacio T-invariante no trivial.

Como vemos, cada teorema extiende al anterior en el sentido de que permite alargar la cadena de conmutaciones que lo relaciona con un operador compacto, de forma que se siga cumpliendo la tesis. Podríamos preguntarnos entonces hasta dónde es posible llegar con extensiones de este tipo. Es decir: ¿es posible extender el teorema de Lomonosov a tres conmutaciones? Formalmente, el problema es el siguiente:

Problema 4.20. *Sea X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{B}(X)$. Supongamos que existen $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(X)$ operadores no escalares tales que*

- *T conmuta con S_1,*
- *S_1 conmuta con S_2,*
- *S_2 conmuta con un operador compacto no nulo.*

¿Podemos afirmar que, en tales condiciones, existe un subespacio T-invariante no trivial?

Desafortunadamente, la respuesta al problema anterior es negativa. Presentaremos un ejemplo de sencilla construcción a partir del operador de C. J. Read construido en la sección 4.1 anterior.

Consideremos, pues, el operador $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ sin subespacios invariantes no triviales definido en la Sección 4.1. A lo largo de este epígrafe, emplearemos la misma notación que en la Sección 4.1. Además, sin pérdida de generalidad, asumiremos que los enteros a_i, b_i que forman la sucesión d, son todos números pares.

Definición 4.21. Definimos el operador $S_2 : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ como

$$S_2 f_i = \begin{cases} f_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Lema 4.22. *Se tiene que*

$$S_2 e_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.20}$$

En particular, S_2 es acotado en $\mathbb{C}^\infty$ y puede extenderse a ℓ^1.

Demostración.

Para probar el lema, consideramos todos los posibles casos, enumerados como en la Sección 4.1 anterior:

(*a*) Tenemos $S_2 e_0 = S_2 f_0 = f_0 = e_0$.

(*b*,1) En este caso, se tiene

$$S_2 e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} S_2 f_i = \begin{cases} 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} f_i = e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.21}$$

$(b,2)$ Dado que a_n es par, i es par si y sólo si $i - ra_n$ es par, por lo que

$$S_2 e_i = a_{n-r}(S_2 f_i - S_2 f_{i-ra_n}) = \begin{cases} a_{n-r}(f_i - f_{i-ra_n}) = e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.22}$$

$(b,3)$ De manera análoga al caso $(b,1)$,

$$S_2 e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} S_2 f_i = \begin{cases} 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} f_i = e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.23}$$

$(b,4)$ De forma similar, tenemos

$$S_2 e_i = 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} S_2 f_i = \begin{cases} 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} f_i = e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.24}$$

$(b,5)$ Por último, puesto que b_n es par,

$$S_2 e_i = S_2 f_i - b_n S_2 f_{i-b_n} = \begin{cases} f_i - b_n f_{i-b_n} = e_i & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.25}$$

Por lo tanto, hemos probado que $S_2 e_i = e_i$ para cada i par, y $S_2 e_i = 0$ para i impar. Claramente, esto implica que S_2 es acotado en $\mathbb{C}^\infty$, por lo que, razonando de manera similar a lo expuesto en la nota 4.12, se deduce que S_2 puede ser extendido a un operador lineal y continuo definido en ℓ_1. $\square$

En adelante, denotaremos por S_2 a la extensión del operador anterior, esto es, consideraremos $S_2 \in \mathcal{B}(\ell^1)$.

Lema 4.23. *El operador $S_2 \in \mathcal{B}(\ell^1)$ conmuta con T^2.*

Demostración.
Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, tenemos

$$T^2 S_2 f_i = \begin{cases} T^2 f_i = f_{i+2} & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.26}$$

y también

$$S_2 T^2 f_i = \begin{cases} S_2 f_{i+2} = f_{i+2} & \text{si } i \text{ es par,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.27}$$

En consecuencia, $S_2 T^2 f_i = T^2 S_2 f_i$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$, luego $S_2 T^2 x = T^2 S_2 x$ para cada $x \in \mathbb{C}^\infty$. Como $\mathbb{C}^\infty$ es denso en ℓ^1, se sigue que S_2 conmuta con T^2. $\square$

Definición 4.24. Sea $K : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ el operador definido de modo que $Ke_0 = e_0$ y $Ke_i = 0$ para $i > 0$.

Está claro que K es un operador (no nulo) de rango 1, y por tanto compacto.

Tomando $S_1 = T^2 \in \mathcal{B}(\ell^1)$, es evidente que S_1 conmuta con T. Además, en virtud del Lema 4.23, S_1 conmuta con S_2. Por otra parte, a partir de las definiciones es inmediato comprobar que S_2 conmuta con K. Por otra parte, los operadores S_1 y S_2 son no escalares pues $S_2 f_1 = 0$ (y $S_2 \neq 0$) y $S_1 f_1 = f_3$. Teniendo en cuenta que T no tiene subespacios invariantes no triviales, esta construcción proporciona una respuesta negativa al problema 4.20 anterior: la cadena de conmutación del teorema de Lomonosov no puede alargarse más.

Notemos, como curiosidad, que el teorema de Lomonosov 3.25 sí se puede aplicar al operador $S_1 = T^2$. Así, deducimos que existe algún subespacio invariante no trivial para T^2 aunque no exista ninguno para T. En esta línea, el siguiente epígrafe muestra un resultado sorprendente también en el espacio ℓ_1.

4.2.2. Más allá del ejemplo de C. J. Read

Precisamente en el mismo artículo en el que C. J. Read presentaba el operador sin subespacios invariantes en el espacio ℓ_1 que hemos comentado en este capítulo (véase [6]), el matemático propuso la siguiente conjetura.

Conjetura 4.25. *Existe un operador $T \in \mathcal{B}(\ell_1)$ tal que para todo polinomio no constante p, $p(T)$ no tiene subespacios invariantes no triviales.*

Más de 30 años tuvieron que pasar hasta que se demostró que, en efecto, la conjetura es correcta. En el año 2018, Eva A. Gallardo-Gutiérrez y Charles Read mostraron en [12] su construcción de un operador cuasinilpotente en ℓ_1 tal que ningún polinomio no constante en T tiene un subespacio invariante no trivial.

Este resultado supone un gran avance respecto al ejemplo aquí presentado, puesto que permite obtener una infinidad de operadores en ℓ_1 sin subespacios invariantes sin más que elegir polinomios no constantes cualesquiera.

4.2.3. El problema en espacios de Hilbert

Como ya indicábamos en el Capítulo 2, el problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert (Problema 2.3) continúa abierto a día de hoy. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto interior y completo, es decir, un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach cuya norma está inducida por un producto interior. La existencia de tal producto dota de buenas propiedades al espacio. Algunas de las más destacables son:

(Geometría) En virtud del Teorema de la Proyección Ortogonal, todo subespacio vectorial cerrado M de $\mathcal{H}$ es complementado. Es más, se tiene una descomposición de $\mathcal{H}$ como suma directa ortogonal de M y su subespacio ortogonal $M^\perp$, $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$

(Álgebra) Todo espacio de Hilbert tiene una base de Hilbert. De esta forma, si $\mathcal{H}$ es separable, existe un conjunto ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ todo elemento $x \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. En teoría de espacios de Banach, el concepto de base de Schauder se aproxima a esta idea, aunque hoy sabemos (P. Enflo, [10]) que existen espacios de Banach que no admiten bases de Schauder.

($\mathcal{H} \equiv \ell_2$) Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isomorfo a ℓ_2. Es más, el dual de ℓ_2 es también ℓ_2.

A pesar de lo que podríamos pensar inicialmente, las buenas propiedades de los espacios de Hilbert dificultan el problema. En primer lugar, puesto que la solución en espacios de Banach es negativa, si así lo fuese en espacios de Hilbert, el contraejemplo a encontrar habría de tener más propiedades. Por otro lado, si la solución fuese afirmativa, la resolución del problema en espacios de Banach no aporta ninguna idea sobre como probarlo.

Como cierre a este trabajo, planteamos un último problema que permaneció abierto durante la década de 1970, sugiriendo que el problema del subespacio invariante podría tener una solución afirmativa sencilla basada en el Teorema de Lomonosov:

Problema 4.26. *Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita,*

¿todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisface las hipótesis del Teorema de Lomonosov (Teorema 3.25)?

En virtud de los ejemplos de P. Enflo y C.J. Read, hoy sabemos que existen operadores en espacios de Banach que no tienen subespacios invariantes, y, en consecuencia, tales operadores no satisfacen las hipótesis del Teorema de Lomonosov 3.25. Sin embargo, estos ejemplos no permiten concluir nada sobre el Problema 4.26 anterior, planteado sobre espacios de Hilbert.

En el año 1978, D. W. Hadwin, E. A. Nordgren, H. Radjavi y P. Rosenthal proporcionan un ejemplo de un operador en un espacio de Hilbert separable que no cumple las hipótesis del Teorema 3.25 , lo que supone una solución negativa al Problema 4.26 anterior. Además del interés histórico, está construcción permite concluir que ni siquiera en espacios de Hilbert se cumple que todos los operadores satisfagan tales hipótesis. Observemos que, si se probase que todo operador entre espacios de Hilbert separables está en las hipótesis del Teorema 3.25, tendríamos una solución afirmativa al Problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert (Problema 2.3). El ejemplo construido por D. W. Hadwin et al. invalida esta aproximación a la solución.

Bibliografía

Bibliografía básica

[1] Abramovich, Y. A. y Aliprantis, C. D., *An invitation to Operator theory*, American Mathematical Society, 2002.

[2] Aliprantis, C. D. y Border, K., *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, 2006.

[3] Aliprantis, C. D. y Burkinshaw, O., *Positive Operators*, Springer, 2006.

[4] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V., Pelant, J. y Zizler, V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[5] Kubrusly, C. S., *Hilbert Space Operators: A Problem Solving Approach*, Birkhäuser, 2003.

[6] Read, C. J., *A short proof concerning the invariant subspace problem*, Journal of the London Mathematical Society **s2-34** (1986), 335-348.

[7] Tradacete, P., *El problema del subespacio invariante en espacios de Banach*, La Gaceta de la RSME **14** (2011), 491-509.

[8] Troitsky, V., *Lomonosov's theorem cannot be extended to chains of four operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **128** (1999), 521-525.

Bibliografía complementaria

[9] Aronszajn, N., Smith, K. T., *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Annals of Mathematics **60** (1954), 345-350.

[10] Enflo, P., *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica **130** (1973), 309-317.

[11] Enflo, P., *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Mathematica **158:3** (1987), 213–313.

[12] Gallardo-Gutiérrez, E., Read, C., *Operators having no non-trivial closed invariant subspaces on ℓ_1: a step further*, Proceedings of the London Mathematical Society **3**:00 (2018), 1–26.

[13] Hadwin, D. W., Nordgren, E. A., Radjavi, H. y Rosenthal, P., *An operator not satisfying Lomonosov's hypothesis*, Journal of Functional Analysis **38:3** (1980), 410–415.

[14] Halmos, P., R., *Ten problems in Hilbert spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **76:5**: (1970), 887–933.

[15] Lomonosov, V. I., *Invariant subspaces for operators commuting with compact operators*, Functional Analysis and its Applications **7** (1973), 55-56.

[16] Lomonosov, V. I. y Shulman, V. S., *Halmos problems and related results in the theory of invariant subspaces*, Russian Mathematical Surveys **73:1** (2018), 35-98.

[17] Radjavi, H. y Rosenthal, P., *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, 1973.

[18] Read, C. J., *A solution to the invariant subspace problem on the space* ℓ_1, Bulletin of the London Mathematical Society **17** (1985), 305–317.